

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*

ВЫПУСК
11

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
1937

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО

ВЫПУСК ОДИННАДЦАТЫЙ



ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Москва, Центр, Третьяковский проезд 1, ОНТИ,
Главная редакция технико-теоретической литературы

АННОТАЦИЯ

Сборник содержит статьи, задачи и библиографию по элементарной и высшей математике. В отличие от предыдущих выпусков, этот сборник содержит обширный отдел "Текущая жизнь", в который, в частности, включены резолюции математической группы Академии наук, Математического комитета НКП и Математического о-ва об учебниках и программах по математике.

Сборник рассчитан на учащихся и преподавателей различных учебных заведений и любителей математики

Редакция Р. Н. Бончковского.
Корректор Н. И. Носилов.

Сдано в производство 13/VII-1937 г.

Печ. л. 5. Уч.-Авт. л. 6,9.

Печ. зн. в бум. л. 92,000.

Уполн. Главлита № Б-13849.

Тираж 5000, Уч. № 4601.

Кол. бум. л. 2,5 Главн. ред. технико-теор. лит. № 9.

Зак. № 2314.

Оформление Е. Г. Шлак.

График М. М. Сыркин.

Подписано к печати 21/VIII-1937 г.

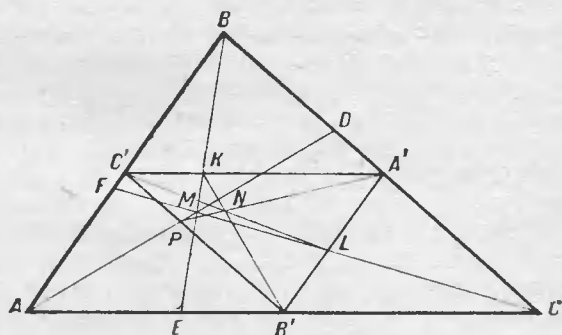
Формат 62×94¹/₁₆.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ШЛЕМИЛЬХА

С. И. Зетель (Москва)

Немецким математиком Шлемильхом (Schlömilch) была доказана следующая теорема: прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот его, пересекаются в одной точке.

Доказательства теоремы Шлемильха, приводимые в некоторых курсах геометрии, основаны на свойствах изотомических прямых¹⁾ треугольника (см. Ефремов, Новая геометрия треугольника, изд. 1902 г., стр. 133). В настоящей заметке мы дадим следующее обобщение теоремы Шлемильха: прямые,



Фиг. 1.

соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответственных прямых Чебы, пересекаются в одной точке. Наконец, мы увидим, что это обобщение может быть развито еще далее. Доказательство теоремы очень просто и основано на теореме Чебы.

Пусть в треугольнике ABC (фиг. 1) AD , BE и CF — произвольные прямые, пересекающиеся в точке M . A' , B' , C' соответственно — середины сторон BC , CA и AB ; K , L , P соответственно — середины прямых BE , CF , AD .

На основании теоремы Чебы имеем для прямых AD , BE , CF

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1.$$

¹⁾ Изотомическими точками называются две точки на стороне треугольника, равноотстоящие от середины этой стороны. Две прямые, соединяющие вершину треугольника с изотомическими точками противоположной стороны, называются изотомическими прямыми (см. Ефремов, стр. 113).

Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на 2:

$$\frac{\frac{1}{2} AE}{\frac{1}{2} EC} \cdot \frac{\frac{1}{2} CD}{\frac{1}{2} DB} \cdot \frac{\frac{1}{2} BF}{\frac{1}{2} FA} = 1,$$

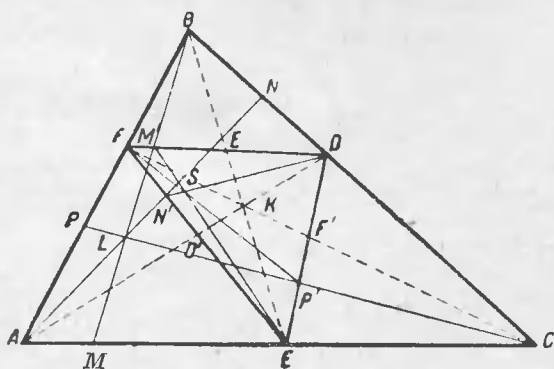
или

$$\frac{C'K}{KA'} \cdot \frac{B'P}{PC'} \cdot \frac{A'L}{LB'} = 1.$$

Прямые $A'P$, $B'K$, $C'L$, исходящие из вершин треугольника $A'B'C'$, удовлетворяют условию теоремы, обратной теореме Чевы, и, следовательно, пересекаются в одной точке (на фиг. 1 — в точке N).

Треугольник, вершины которого находятся в серединах сторон данного, называется дополнительным по отношению к данному. Назовем точку на стороне дополнительного треугольника в пересечении с соответственной прямой Чевы и вершину дополнительного треугольника, противолежащего этой стороне, соответственными. Тогда обобщенная теорема Шлемильха может быть сформулирована следующим образом: прямые, соединяющие вершины дополнительного треугольника с соответственными точками, пересекаются в одной точке.

Дополнительный треугольник имеет своими вершинами основания медиан данного треугольника. Покажем, что свойство, обнаруженное нами у дополнительного треугольника, присуще всякому треугольнику оснований.



Фиг. 2.

называется треугольник, вершины которого находятся в основаниях трех прямых Чевы.)

Пусть в треугольнике ABC проведены из вершины прямые AD , BE и CF , пересекающиеся в точке K (фиг. 2). Назовем эти прямые первой тройкой чевяиан. Основания этих прямых являются вершинами треугольника оснований.

Проведем из вершины треугольника ABC еще три прямые AN , BM , CP , пересекающиеся в точке L . Назовем эти прямые второй тройкой чевяиан.

Сторону треугольника оснований, соединяющую основания двух чевяиан первой тройки, и прямую второй тройки, выходящую

из третьей вершины, назовем соответственными. Прямые BM , FD — соответственные, так же как и прямые FE , AN и ED , PC .

Докажем следующую теорему: прямые, соединяющие вершины треугольника оснований с точками пересечения противоположных сторон и соответственных прямых, пересекаются в одной точке.

Рассмотрим три следующие сложные отношения:

$$(ACME) = \frac{MA}{MC} : \frac{EA}{EC} = \frac{MA \cdot EC}{MC \cdot EA},$$

$$(CBND) = \frac{NC}{NB} : \frac{DC}{DB} = \frac{NC \cdot DB}{NB \cdot DC},$$

$$(BAPF) = \frac{PB}{PA} : \frac{FB}{FA} = \frac{PB \cdot FA}{PA \cdot FB};$$

$$(ACME) \cdot (CBND) \cdot (BAPF) = \frac{MA \cdot NC \cdot PB \cdot EC \cdot DB \cdot FA}{MC \cdot NB \cdot PA \cdot EA \cdot DC \cdot FB}.$$

На основании теоремы Чебы имеем:

$$\frac{MA \cdot NC \cdot PB}{MC \cdot NB \cdot PA} = -1,$$

$$\frac{EC \cdot DB \cdot FA}{EA \cdot DC \cdot FB} = -1.$$

Следовательно,

$$(ACME) \cdot (CBND) \cdot (BAPF) = 1.$$

Из равенства сложных отношений:

$$(FDM'E') = (ACME),$$

$$(EFN'D') = (CBND),$$

$$(DEP'F') = (BAPF),$$

закключаем, что

$$(FDM'E') \cdot (EFN'D') \cdot (DEP'F') = 1,$$

$$\frac{M'F \cdot E'D \cdot N'E \cdot D'F \cdot P'D \cdot F'E}{M'D \cdot E'F \cdot N'F \cdot D'E \cdot P'E \cdot F'D} = 1.$$

На основании теоремы Чебы имеем

$$\frac{E'D \cdot D'F \cdot F'E}{E'F \cdot D'E \cdot F'D} = -1.$$

Следовательно,

$$\frac{M'F}{M'D} \cdot \frac{N'E}{N'F} \cdot \frac{P'D}{P'E} = -1.$$

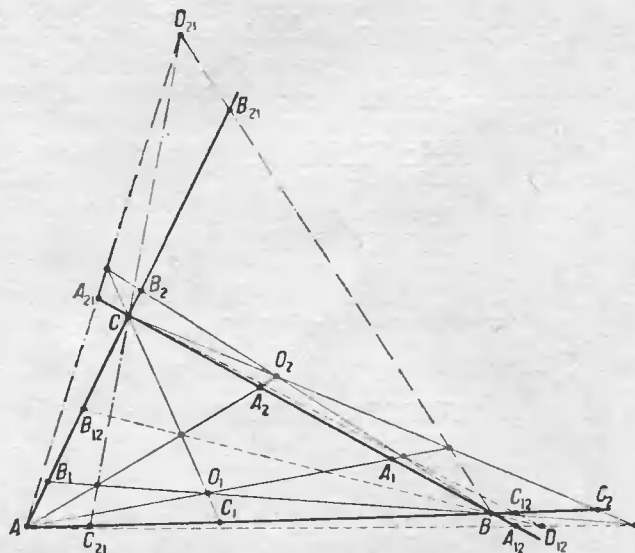
На основании теоремы, обратной теореме Чебы, заключаем, что прямые EM' , DN' , FP' пересекаются в одной точке (на фиг. 2 — точка S).

Справедлива и обратная теорема: если в треугольнике оснований провести три прямые Чебы, то прямые, исходящие из вершин данного треугольника и проходящие через соответственные точки сторон треугольника оснований, пересекутся в одной точке.

О ДВУХ ПУЧКАХ ЧЕВИАН И ДВУХ ТРАНСВЕРСАЛЯХ ТРЕУГОЛЬНИКА

Р. Н. Бончковский (Москва)

§ 1. Пусть в треугольнике ABC (фиг. 1) проведены прямые AA_1, BB_1, CC_1 , пересекающиеся в одной точке O_1 , и прямые AA_2, BB_2, CC_2 , пересекающиеся в одной точке O_2 . Прямые этих двух



Фиг. 1.

пучков чевиан пересекаются в шести точках (если не считать вершины треугольника). Через эти точки пересечения и вершины треугольника ABC проведем прямые, именно:

через точку пересечения прямых	AA_1	и	BB_2	прямую	CC_{12}
»	»	»	BB_1	и	CC_2 » AA_{12}
»	»	»	CC_1	и	AA_2 » BB_{12}
»	»	»	AA_2	и	BB_1 » CC_{21}
»	»	»	BB_2	и	CC_1 » AA_{21}
»	»	»	CC_2	и	AA_1 » BB_{21}

Я утверждаю, что прямые $AA_{12}, BB_{12}, CC_{12}$ проходят через одну точку и точно так же прямые $AA_{21}, BB_{21}, CC_{21}$ проходят через одну точку. Доказательство заключается в следующем.

Так как прямые AA_1 , BB_2 , CC_{12} проходят через одну точку, то по теореме Чевы

$$AC_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_2 = C_{12}B \cdot A_1C \cdot B_2A.$$

Подобные же равенства можно написать для остальных троек прямых, проходящих через одну точку. Так получим шесть равенств:

$$\begin{aligned} AC_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_2 &= C_{12}B \cdot A_1C \cdot B_2A, \\ AC_2 \cdot BA_{12} \cdot CB_1 &= C_2B \cdot A_{12}C \cdot B_1A, \\ AC_1 \cdot BA_2 \cdot CB_{12} &= C_1B \cdot A_2C \cdot B_{12}A, \\ AC_{21} \cdot BA_2 \cdot CB_1 &= C_{21}B \cdot A_2C \cdot B_1A, \\ AC_1 \cdot BA_{21} \cdot CB_2 &= C_1B \cdot A_{21}C \cdot B_2A, \\ AC_2 \cdot BA_1 \cdot CB_{21} &= C_2B \cdot A_1C \cdot B_{21}A. \end{aligned}$$

Перемножив почленно первые три равенства и сделав то же самое с тремя последними равенствами, получим два равенства:

$$\left. \begin{aligned} AC_{12} \cdot BA_{12} \cdot CB_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 \cdot CB_2 \cdot AC_2 \cdot BA_2 &= \\ &= C_{12}B \cdot A_{12}C \cdot B_{12}A \cdot A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B \cdot B_2A \cdot C_2B \cdot A_2C, \\ AC_{21} \cdot BA_{21} \cdot CB_{21} \cdot BA_2 \cdot CB_2 \cdot AC_2 \cdot CB_1 \cdot AC_1 \cdot BA_1 &= \\ &= C_{21}B \cdot A_{21}C \cdot B_{21}A \cdot A_2C \cdot B_2A \cdot C_2B \cdot B_1A \cdot C_1B \cdot A_1C. \end{aligned} \right\} (1)$$

Применив теорему Чевы к прямым AA_1 , BB_1 , CC_1 и к прямым AA_2 , BB_2 , CC_2 , получим

$$\begin{aligned} BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 &= A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B, \\ CB_2 \cdot AC_2 \cdot BA_2 &= B_2A \cdot C_2B \cdot A_2C. \end{aligned}$$

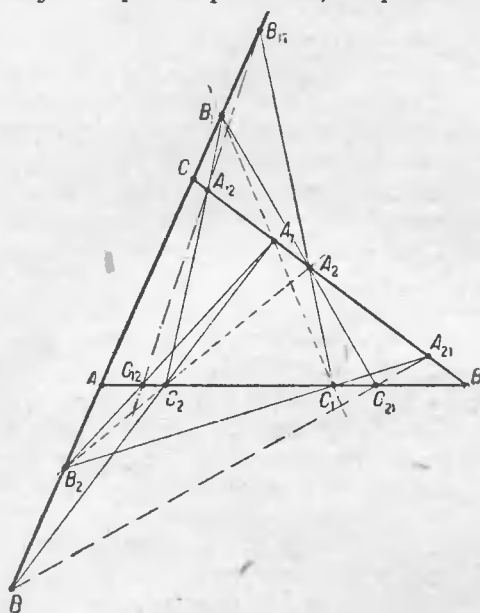
Поэтому после необходимых сокращений равенства (1) дают

$$\begin{aligned} AC_{12} \cdot BA_{12} \cdot CB_{12} &= C_{12}B \cdot A_{12}C \cdot B_{12}A, \\ AC_{21} \cdot BA_{21} \cdot CB_{21} &= C_{21}B \cdot A_{21}C \cdot B_{21}A. \end{aligned}$$

Отсюда по теореме, обратной теореме Чевы, делаем заключение, что прямые AA_{12} , BB_{12} , CC_{12} проходят через одну точку и что прямые AA_{21} , BB_{21} , CC_{21} также проходят через одну точку. На чертеже (фиг. 1) первая точка обозначена через D_{12} , а вторая — D_{21} .

Так как теорема Чевы верна независимо от того, находится ли точка пересечения внутри или вне треугольника, то и доказанное нами предложение справедливо при любом положении центров двух пучков чевиан.

§ 2. Пусть теперь стороны треугольника ABC пересечены двумя трансверсальми, пересекающими стороны треугольника



Фиг. 2.

в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 (фиг. 2). Проведем прямые A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 и назовем точки их пересечения соответственно со сторонами AB, BC и CA треугольника через C_{12}, A_{12}, B_{12} . Я утверждаю, что точки C_{12}, A_{12}, B_{12} лежат на одной прямой. Точно так же, если мы проведем прямые A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 , то точки C_{21}, A_{21}, B_{21} их пересечения соответственно со сторонами AB, BC и CA лежат на одной прямой. Доказательство заключается в следующем.

Так как точки A_1, B_2, C_{12} лежат на одной прямой, то по теореме Менелая

$$AC_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_2 = -C_{12}B \cdot A_1C \cdot B_2A.$$

Подобные же равенства можно написать для каждой из остальных пяти прямых: $B_1C_2A_{12}, C_1A_2B_{12}, A_2B_1C_{21}, B_2C_1A_{21}, C_2A_1B_{21}$. Всего получаем шесть равенств:

$$\begin{aligned} AC_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_2 &= -C_{12}B \cdot A_1C \cdot B_2A, \\ AC_2 \cdot BA_{12} \cdot CB_1 &= -C_2B \cdot A_{12}C \cdot B_1A, \\ AC_1 \cdot BA_2 \cdot CB_{12} &= -C_1B \cdot A_2C \cdot B_{12}A, \\ AC_{21} \cdot BA_2 \cdot CB_1 &= -C_{21}B \cdot A_2C \cdot B_1A, \\ AC_1 \cdot BA_{21} \cdot CB_2 &= -C_1B \cdot A_{21}C \cdot B_2A, \\ AC_2 \cdot BA_1 \cdot CB_{21} &= -C_2B \cdot A_1C \cdot B_{21}A. \end{aligned}$$

Перемножив почленно первые три равенства и сделав то же с тремя последними равенствами, получим два равенства:

$$\left. \begin{aligned} AC_{12} \cdot BA_{12} \cdot CB_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 \cdot CB_2 \cdot AC_2 \cdot BA_2 &= \\ &= -C_{12}B \cdot A_{12}C \cdot B_{12}A \cdot A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B \cdot B_2A \cdot C_2B \cdot A_2C, \\ AC_{21} \cdot BA_{21} \cdot CB_{21} \cdot BA_2 \cdot CB_2 \cdot AC_2 \cdot CB_1 \cdot AC_1 \cdot BA_1 &= \\ &= -C_{21}B \cdot A_{21}C \cdot B_{21}A \cdot A_2C \cdot B_2A \cdot C_2B \cdot B_1A \cdot C_1B \cdot A_1C. \end{aligned} \right\} (2)$$

Применим теорему Менелая к прямым $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$:

$$\begin{aligned} AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 &= -C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A, \\ AC_2 \cdot BA_2 \cdot CB_2 &= -C_2B \cdot A_2C \cdot B_2A; \end{aligned}$$

поэтому после необходимых сокращений равенства (2) дают

$$AC_{12} \cdot BA_{12} \cdot CB_{12} = -C_{12}B \cdot A_{12}C \cdot B_{12}A,$$

$$AC_{21} \cdot BA_{21} \cdot CB_{21} = -C_{21}B \cdot A_{21}C \cdot B_{21}A.$$

Отсюда по теореме, обратной теореме Менелая, делаем заключение, что три точки A_{12} , B_{12} , C_{12} лежат на одной прямой и три точки A_{21} , B_{21} , C_{21} также лежат на одной прямой.

§ 3. Теорема о трансверсалиях (§ 2) была доказана независимо от теоремы о двух пучках чевиан (§ 1). Между тем эти теоремы тесно связаны друг с другом; именно, одна получается из другой по принципу двойственности. До сих пор это обстоятельство проявилось лишь в том, что доказательства этих двух теорем были основаны на двух двойственных теоремах — теореме Чевы и теореме Менелая. Покажем теперь, как можно при помощи принципа двойственности получить одну теорему непосредственно из другой.

Около произвольного треугольника ABC опишем окружность и рассмотрим треугольник $A'B'C'$, взаимный треугольнику ABC относительно этой окружности. Точка A' будет полюсом прямой BC ; B' — полюсом прямой AC ; C' — полюсом прямой AB ; $A'B'$ будет полярной точки C , т. е. будет касательной к окружности в точке C ; $B'C'$ — полярной точки A ; $C'A'$ — полярной точки B . Вообще, при взаимном преобразовании каждой прямой соответствует определенная точка, именно, — ее полюс; каждой точке — прямая, ее полярная.

В треугольнике ABC проведем три прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 , пересекающиеся в одной точке; в треугольнике $A'B'C'$ им будут соответствовать три точки A'_1 , B'_1 , C'_1 лежащие, на сторонах треугольника $A'B'C'$ и лежащие на одной прямой. Другой тройке чевиан AA_2 , BB_2 , CC_2 соответствует другая тройка точек A'_2 , B'_2 , C'_2 , лежащих на одной прямой.

Точкам пересечения двух троек чевиан соответствуют прямые $A'_1B'_2$, $B'_1C'_2$, $C'_1A'_2$; $A'_2B'_1$, $B'_2C'_1$, $C'_2A'_1$. Прямые AA_{12} , BB_{12} , CC_{12} ; AA_{21} , BB_{21} , CC_{21} , проходящим через вершины треугольника ABC и через точки пересечения чевиан, соответствуют точки пересечения прямых $A'_1B'_2$, ..., $C'_2A'_1$ со сторонами треугольника $A'B'C'$; это будут точки C'_{12} , A'_{12} , B'_{12} ; C'_{21} , A'_{21} , B'_{21} . Тому обстоятельству, что прямые AA_{12} , BB_{12} , CC_{12} , а также и прямые AA_{21} , BB_{21} , CC_{21} пересекаются в одной точке, соответствует то, что точки A'_{12} , B'_{12} , C'_{12} расположены на одной прямой, так же как точки A'_{21} , B'_{21} , C'_{21} .

Таким образом обе фигуры действительно двойственны между собой.

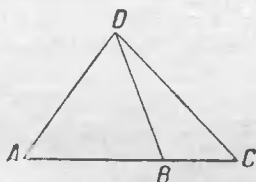
О ВЫЧИСЛЕНИИ ДЛИНЫ „ПРЯМОЙ n “

Д. А. Д е л и б а ш (Баку)

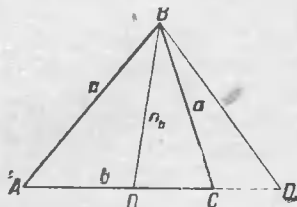
В первом выпуске „Математического просвещения“ была помещена статья Зетеля „О свойствах прямых n “, в которой автор рассматривает их свойства и дает способ их построения. Мы же зададимся целью вычислить длину „прямой n “. Для этого нам понадобится теорема Стюарта ¹⁾, устанавливающая зависимость между тремя точками, находящимися на одной прямой, и четвертой вне ее. Эта зависимость заключается в том, что если A , B и C — три указанные точки и D — точка, находящаяся вне прямой AC (фиг. 1), то существует следующее тождественное соотношение:

$$AD^2 \cdot BC + CD^2 \cdot AB = BD^2 \cdot AC + AC \cdot AB \cdot BC.$$

Пусть теперь задан треугольник ABC , в котором проведена из вершины B „прямая n “, т. е. прямая BD или BD_1 , делящая



Фиг. 1.



Фиг. 2.

сторону AC в отношении n -х степеней прилежащих сторон AB и BC (фиг. 2).

Обозначим внутреннюю „прямую n “ BD через n_b , а внешнюю BD_1 через n'_b . Тогда по теореме Стюарта имеем

$$n_b^2 \cdot AC = AB^2 \cdot DC + BC^2 \cdot AD - AC \cdot AD \cdot DC$$

и

$$(n'_b)^2 \cdot AC = BC^2 \cdot AD_1 + AC \cdot AD_1 \cdot CD_1 - AB^2 \cdot CD_1.$$

Обозначая AB , BC , AC соответственно через c , a , b и зная, что $\frac{AD}{DC} = \frac{c^n}{a^n}$ и $\frac{AD_1}{CD_1} = \frac{c^n}{a^n}$, откуда

$$AD = \frac{bc^n}{a^n + c^n}, \quad DC = \frac{ba^n}{a^n + c^n} \quad \text{и} \quad AD_1 = \frac{bc^n}{c^n - a^n}, \quad CD_1 = \frac{ba^n}{c^n - a^n},$$

мы получим

$$\begin{aligned} n_b^2 &= \frac{a^n c^2 + a^2 c^n}{a^n + c^n} - \frac{a^n b^2 c^n}{(a^n + c^n)^2} = \\ &= \frac{a^2 c^2}{(a^n + c^n)^2} [(a^{n-2} + c^{n-2})(a^n + c^n) - a^{n-2} b^2 c^{n-2}] \end{aligned}$$

¹⁾ Доказательство теоремы Стюарта можно найти в книге Ш а л ь, Высшая геометрия, изд. 1910, стр. 202 и сл. (Прим. ред.)

и

$$(n'_b)^2 = \frac{a^2 c^2}{(c^n - a^n)^2} \cdot [(c^{n-2} - a^{n-2})(c^n - a^n) + a^{n-2} b^2 c^{n-2}],$$

или окончательно

$$n_b = \frac{ac}{a^n + c^n} \sqrt{(a^{n-2} + c^{n-2})(a^n + c^n) - a^{n-2} b^2 c^{n-2}} \quad (1)$$

и

$$n'_b = \frac{ac}{a^n - c^n} \sqrt{(a^{n-2} - c^{n-2})(a^n - c^n) + a^{n-2} b^2 c^{n-2}}. \quad (2)$$

Рассмотрим частные случаи:

1. $n = 0$; тогда $AD = DC$, т. е. BD — медиана и ее длина

$$m_b = \frac{ac}{2} \sqrt{(a^{-2} + c^{-2}) \cdot 2 - a^{-2} b^2 c^{-2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}.$$

2. $n = 1$; тогда $\frac{AD}{DC} = \frac{c}{a}$, т. е. BD — внутренняя биссектриса и ее длина

$$\begin{aligned} l_b &= \frac{ac}{a+c} \sqrt{(a^{-1} + c^{-1})(a+c) - a^{-1} b^2 c^{-1}} = \\ &= \frac{1}{a+c} \sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]}, \end{aligned}$$

или, полагая $a + b + c = 2p$, получим, что

$$l_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}.$$

Длина внешней биссектрисы вычислится по формуле (2), она будет

$$\begin{aligned} l'_b &= \frac{ac}{a-c} \sqrt{(a^{-1} - c^{-1})(a-c) + a^{-1} b^2 c^{-1}} = \\ &= \frac{1}{a-c} \sqrt{ac[b^2 - (a-c)^2]} = \frac{2}{a-c} \sqrt{ac(p-a)(p-c)}. \end{aligned}$$

(См. статью Зетеля в журнале „Математика и физика в средней школе“, № 4 за 1934 г.)

3. $n = 2$; тогда $\frac{AD}{DC} = \frac{c^2}{a^2}$, т. е. BD — симедиана и ее длина

$$k_b = \frac{ac}{a^2 + c^2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = \frac{2ac}{a^2 + c^2} m_b$$

и

$$k'_b = \frac{abc}{a^2 - c^2}.$$

СВОЙСТВА ЧИСЕЛ РЯДА ФИБОНАЧЧИ

С. И. Горо дов (Ленинград)

В изданной в 1202 г. книге Леонарда Пизанского (Фибоначчи) Incipit Liber Abbaci compositus a Leonardo filius Bonacci Pisano дан ряд, который позднее получил большое значение в математике, в особенности

в теории рекуррентных рядов и в так называемой аддитивной теории чисел. В настоящей статье будут доказаны некоторые свойства этого целочисленного рекуррентного ряда — ряда Фибоначчи.

Напомним, что ряд $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ называется целочисленным рекуррентным рядом, если каждый его член является некоторой целочисленной линейной функцией предыдущих членов. Впервые целочисленными рекуррентными рядами начал заниматься Кассини (Cassini), затем Муавр (Moivre) и в дальнейшем Люка (Lucas). В частности, в ряде Фибоначчи каждый последующий член равен сумме двух предыдущих:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Следовательно, закон образования членов ряда Фибоначчи таков:

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}.$$

Уравнение

$$x^2 = x + 1$$

называется скалой этого ряда; оно играет большую роль в исследовании ряда Фибоначчи. Корни скалы суть

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

С помощью корней скалы n -й член s_n ряда Фибоначчи можно представить в следующем виде:

$$s_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}}.$$

Эта формула ¹⁾ впервые была выведена французским математиком Бине (Binet).

¹⁾ Убедимся в правильности этой формулы. Для $n = 1, 2$ она проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1, \\ s_2 &= \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4}}{\sqrt{5}} = 1. \end{aligned}$$

Далее, достаточно доказать рекуррентное соотношение

$$\frac{\alpha_1^{n-2} - \alpha_2^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}},$$

После этих предварительных замечаний мы перейдем к выводу интересных нас свойств членов ряда Фибоначчи.

1. $S_1 + S_3 + \dots + S_{2n+1} = S_{2n+2}.$

Действительно,

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 + \dots + S_{2n+1} &= \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^3 - a_2^3}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{a_1^{2n+1} - a_2^{2n+1}}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{(a_1 + a_1^3 + \dots + a_1^{2n+1}) - (a_2 + a_2^3 + \dots + a_2^{2n+1})}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{a_1(a_1^{2n+2} - 1)}{a_1^2 - 1} - \frac{a_2(a_2^{2n+2} - 1)}{a_2^2 - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{(a_1 a_2^2 - a_1)(a_1^{2n+2} - 1) - (a_1^2 a_2 - a_2)(a_2^{2n+2} - 1)}{(a_1^2 - 1)(a_2^2 - 1)} \right]. \end{aligned}$$

Но из уравнения скалы видно, что $a_1^2 - 1 = a_1$, $a_2^2 - 1 = a_2$, $a_1 a_2 = -1$, $a_1 + a_2 = 1$; поэтому $a_1 a_2^2 - a_1 = a_1^2 a_2 - a_2 = -1$, и мы получаем

$$S_1 + S_3 + \dots + S_{2n+1} = \frac{a_1^{2n+2} - a_2^{2n+2}}{\sqrt{5}} = S_{2n+2}.$$

2. $1 + S_2 + S_4 + \dots + S_{2n} = S_{2n+1}.$

Действительно,

$$\begin{aligned} S_2 + S_4 + \dots + S_{2n} &= \frac{a_1^2 - a_2^2}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^4 - a_2^4}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{a_1^{2n} - a_2^{2n}}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{(a_1^2 + a_1^4 + \dots + a_1^{2n}) - (a_2^2 + a_2^4 + \dots + a_2^{2n})}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{a_1^{2n+2} - a_1^2}{a_1^2 - 1} - \frac{a_2^{2n+2} - a_2^2}{a_2^2 - 1} \right]. \end{aligned}$$

Но $a_1^2 - 1 = a_1$, $a_2^2 - 1 = a_2$, поэтому полученное выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{a_1^{2n+2} - a_1^2}{a_1} - \frac{a_2^{2n+2} - a_2^2}{a_2} \right] &= \frac{1}{\sqrt{5}} [a_1^{2n+1} - a_2^{2n+1} - (a_1 - a_2)] = \\ &= S_{2n+1} - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$1 + S_2 + S_4 + \dots + S_{2n} = S_{2n+1}.$$

что сделать нетрудно:

$$\begin{aligned} \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}} &= \frac{a_1^{n-2}(a_1 + 1) - a_2^{n-2}(a_2 + 1)}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{a_1^{n-2} \cdot a_1^2 - a_2^{n-2} \cdot a_2^2}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Что $a_1 + 1 = a_1^2$, $a_2 + 1 = a_2^2$, видно из уравнения скалы. (Прим. ред.)

процесс
индукции

Т. и. в. Ф. м. м.

Именно:
 $S_1 + S_3 = S_4$
или
 $S_1 + \dots + S_{2n+1} = S_{2n+2}$
то
 $S_2 + \dots + S_{2n} = S_{2n+1} - 1$
 $= S_{2n+1}$
то

Тогда по индукции: $\beta_{n+1}^2 - \beta_n \beta_{n+2} = \beta_{n+1}^2 - \beta_n^2 - \beta_n \beta_{n+1} =$
 $= \beta_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n) - \beta_n^2 =$
 $= -(\beta_n^2 - \beta_{n-1} \beta_{n+1}) = (-1)^n.$

3.

$$\beta_n^2 - \beta_{n-1} \beta_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \beta_n^2 - \beta_{n-1} \beta_{n+1} &= \left(\frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{5} [a_1^{2n} + a_2^{2n} - 2a_1^n a_2^n - a_1^{2n} + a_1^{n-1} a_2^{n+1} + a_1^{n+1} a_2^{n-1} - a_2^{2n}] = \\ &= \frac{1}{5} [-2a_1^n a_2^n + a_1^{n-1} a_2^{n+1} + a_1^{n+1} a_2^{n-1} (a_1^2 + a_2^2)] = \\ &= \frac{1}{5} [-2(a_1 a_2) a_1^{n-1} a_2^{n-1} + 3a_1^{n-1} a_2^{n-1}] = \\ &= a_1^{n-1} a_2^{n-1} = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

По индукции: 4.

Вспомогательное: Действительно,

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}^2 - \beta_n^2 &= \beta_n(\beta_{n+1} + \beta_{n-1}) = \beta_{2n}. \\ \text{Действ. тем же индукцией} \quad \beta_{n+1}(\beta_{n+2} + \beta_n) &= (\beta_{n-1} + \beta_n)(\beta_n + \beta_{n+1}) = \\ &= \beta_n(\beta_{n+1} + \beta_{n-1}) + \beta_n \beta_{n+1} + \beta_{n-1} \beta_{n+1} = \\ &= \beta_{2n} + \beta_n^2 + \beta_{n-1} \beta_{n+1} = \beta_{2n} + (-1)^{n-1} = \beta_{2n+1}. \end{aligned}$$

Но, как видно из уравнения скалы,

$$\beta_{n+1} + \beta_{n-1} = 2\beta_n \quad \text{и} \quad \beta_n + \beta_{n-2} = 2\beta_{n-1}.$$

поэтому предыдущее выражение принимает вид

$$\frac{1}{5} (a_1^{2n} - 1 - a_2^{2n} - 1) = \beta_{2n} - 1 = \beta_n(\beta_{n+1} - \beta_{n-1} - \beta_{n+1}) = \beta_n(\beta_n - \beta_{n-2} - \beta_{n+1}) = \beta_n(\beta_n - \beta_{n+1}) = -\beta_n^2.$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \dots + \beta_n^2 = \beta_n \beta_{n+1}.$$

Имеем

$$\beta_1^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2}{5}, \quad \beta_2^2 = \frac{a_1^4 + a_2^4 - 2a_1^2 a_2^2}{5}, \quad \dots, \quad \beta_n^2 = \frac{a_1^{2n} + a_2^{2n} - 2a_1^n a_2^n}{5}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \dots + \beta_n^2 &= \\ &= \frac{1}{5} [(a_1^2 + a_1^4 + \dots + a_1^{2n}) + (a_2^2 + a_2^4 + \dots + a_2^{2n})] - \\ &\quad - \frac{2}{5} [a_1 a_2 + a_1^2 a_2^2 + a_1^3 a_2^3 + \dots + a_1^n a_2^n] = \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{a_1^2 (a_1^{2n} - 1)}{a_1^2 - 1} + \frac{a_2^2 (a_2^{2n} - 1)}{a_2^2 - 1} - 2 \cdot \frac{a_1 a_2 (a_1^n a_2^n - 1)}{a_1 a_2 - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{a_1^2 (a_1^{2n} - 1)}{a_1} + \frac{a_2^2 (a_2^{2n} - 1)}{a_2} - 2 \cdot \frac{a_1 a_2 (a_1^n a_2^n - 1)}{-2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5} [a_1^{2n+1} - a_1 + a_2^{2n+1} - a_2 - a_1^n a_2^n + 1] =$$

$$= \frac{1}{5} [a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} - a_1^n a_2^n (a_1 + a_2)] =$$

$$= \frac{a_1^{2n+1} - a_1^n a_2^n + 1 - a_1^{n+1} a_2^n + a_2^{2n+1}}{5} =$$

$$= \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{\sqrt{5}} = S_n S_{n+1}.$$

6.

$$S_n S_{n+1} - S_{n-2} S_{n-1} = S_{2n-1}.$$

Действительно,

$$S_n S_{n+1} - S_{n-2} S_{n-1} =$$

$$= \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{5} [a_1^{2n+1} - a_1^n a_2^n + 1 - a_1^{n+1} a_2^n + a_2^{2n+1} - a_1^{n-3} + a_1^{n-2} a_2^{n-1} +$$

$$+ a_1^{n-1} a_2^{n-2} - a_2^{2n-3}] =$$

$$= \frac{1}{5} [a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} - a_1^{2n-3} - a_2^{2n-3} - (a_1^n a_2^n - a_1^{n-2} a_2^{n-2})(a_1 + a_2)] =$$

$$= \frac{1}{5} \left[a_1^{2n-1} \left(a_1^2 - \frac{1}{a_1^2} \right) + a_2^{2n-1} \left(a_2^2 - \frac{1}{a_2^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} [a_1^{2n-1} \sqrt{5} - a_2^{2n-1} \sqrt{5}] = \frac{a_1^{2n-1} - a_2^{2n-1}}{\sqrt{5}} = S_{2n-1}.$$

7.

$$S_{n+1} S_{n+2} - S_n S_{n+3} = (-1)^n.$$

Действительно,

$$S_{n+1} S_{n+2} - S_n S_{n+3} =$$

$$= \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a_1^{n+2} - a_2^{n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a_1^{n+3} - a_2^{n+3}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{5} [a_1^{2n+3} - a_1^{n+1} a_2^{n+2} - a_1^{n+2} a_2^{n+1} + a_2^{2n+3} - a_1^{2n+3} + a_1^n a_2^{n+3} +$$

$$+ a_1^{n+3} a_2^n - a_2^{2n+3}] = \frac{1}{5} a_1^n a_2^n (a_1^3 - a_1^2 a_2 + a_2^3 - a_2^2 a_1) =$$

$$= \frac{1}{5} a_1^n a_2^n (a_1 - a_2) (a_1^2 - a_2^2) = a_1^n a_2^n (a_1 + a_2) = a_1^n a_2^n = (-1)^n.$$

8.

$$S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_4 + \dots + S_{2n-1} S_{2n} = S_{2n}^2.$$

Действительно,

$$S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_4 + \dots + S_{2n-1} S_{2n} =$$

$$= \frac{1}{5} [(a_1 - a_2)(a_1^2 - a_2^2) + (a_1^2 - a_2^2)(a_1^3 - a_2^3) +$$

$$+ (a_1^3 - a_2^3)(a_1^4 - a_2^4) + \dots + (a_1^{2n-1} - a_2^{2n-1})(a_1^{2n} - a_2^{2n})] =$$

$$= \frac{1}{5} [(a_1^3 + a_1^5 + a_1^7 + \dots + a_1^{4n-1}) + (a_2^3 + a_2^5 + a_2^7 + \dots + a_2^{4n-1}) -$$

$$\begin{aligned} 6. S_{n+1} S_{n+2} - S_{n-1} S_n &= \\ &= S_{n+1}(S_{n+1} + S_n) - (S_{n+2} S_{n-1}) \\ &= S_{n+1}^2 + S_{n+1} S_n - (S_{n+2}^2 - S_n^2) + S_n S_{n+1} \\ &\quad - S_{n-2} S_{n-1} = S_{2n+1} \\ &\quad + S_{2n-1} = S_{2n+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. S_{n+2} S_{n+3} - S_{n+1} S_{n+4} &= \\ &= (S_{n+1} + S_{n+2}) S_{n+2} - \\ &\quad - S_{n+1}(S_{n+2} + S_{n+3}) = \\ &= S_{n+2}^2 - S_{n+1} S_{n+3} = (-1)^n \end{aligned}$$

индукция.
непр следствие 3.

формула:

$$\begin{aligned} S_{2n} S_{2n+1} &= S_{2n+2}^2 - S_{2n}^2 \\ S_{2n} S_{2n+1} + S_{2n+1} S_{2n+2} &= \\ &= (S_{2n+2} - S_{2n}) S_{2n+1} + S_{2n+2}^2 - S_{2n}^2 \\ &= S_{2n+2}^2 - S_{2n}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (a_1 a_2 + a_1^2 a_2^2 + a_1^3 a_2^3 + \dots + a_1^{2n-1} a_2^{2n-1})] = \\
& = \frac{1}{5} \left[\frac{a_1^3 (a_1^{4n-2} - 1)}{a_1^2 - 1} + \frac{a_2^3 (a_2^{4n-2} - 1)}{a_2^2 - 1} - \frac{a_1 a_2 (a_1^{2n-1} a_2^{2n-1} - 1)}{a_1 a_2 - 1} \right] = \\
& = \frac{1}{5} [a_1^{4n+1} + a_2^{4n+1} - a_1^{4n-1} - a_2^{4n-1} - 2] = \\
& = \frac{1}{5} \left[a_1 a_1^{4n} + a_2 a_2^{4n} - \frac{a_1^{4n}}{a_1} - \frac{a_2^{4n}}{a_2} - 2 \right] = \\
& = \frac{1}{5} \left[a_1^{4n} \left(a_1 - \frac{1}{a_1} \right) + a_2^{4n} \left(a_2 - \frac{1}{a_2} \right) - 2 \right] = \\
& = \frac{1}{5} [a_1^{4n} + a_2^{4n} - 2 a_1^{2n} a_2^{2n}] = \left(\frac{a_1^{2n} - a_2^{2n}}{\sqrt{5}} \right)^2 = s_{2n}^2.
\end{aligned}$$

Аналогично можно доказать еще следующие свойства членов ряда Фибоначчи

$$9. s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots \pm s_n = \pm s_{n-1} + 1.$$

$$10. s_n^3 + s_{n+1}^3 - s_{n-1}^3 = s_{3n}.$$

$$11. s_n^4 - s_{n-2} s_{n-1} s_{n+1} s_{n+2} = 1.$$

$$12. s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n = s_{n+2} - 1.$$

13. Невозможно построить треугольник, сторонами которого являются числа ряда Фибоначчи.

14. Если $n = e$ число Фибоначчи обозначим через s_n , то $\frac{s_{n+60} - s_n}{10}$ есть целое число.

15. Последняя цифра числа s_{15k} (k — целое) есть нуль; другими словами, частное $\frac{s_{15k}}{10}$ есть целое число.

16. Число цифр n -го числа ряда Фибоначчи больше $\frac{n-2}{5}$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ ОВАЛА ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

П. С. Моденов (Москва)

Приводимое ниже решение опирается только на существование касательного вектора x к овалу, что является достаточно минимальным требованием для данной задачи.

Рассмотрим полюс O внутри овала постоянной ширины b ¹⁾ и параметризуем точки овала углом ω между постоянным вектором a и радиусом-вектором x , дающим точки овала (фиг. 1). Рассмотрим две функции от ω :

$$x = x(\omega), \quad z = z(\omega),$$

¹⁾ Овалом постоянной ширины b называется замкнутая выпуклая кривая, обладающая тем свойством, что расстояние между двумя любыми параллельными касательными есть величина постоянная, равная b . Рекомендуем сравнить предлагаемое в этой статье доказательство теоремы Барбье с доказательством, данным И. Б. Абельсоном в статье „Кривые постоянной ширины“, Математ. просв., вып. 5, стр. 80—83. (Ред.)

стоящие одна от другой в зависимости $\dot{x} \times \dot{z} \equiv 0^1$), причем z дает точки того же овала. Очевидно,

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2}} \times (z - x) = b,$$

откуда длина s дуги овала

$$s = \frac{1}{b} \int_0^{2\pi} (x - z) \times \dot{x} d\omega.$$

Если поменять местами x и z , то получим

$$s = \frac{1}{b} \int_0^{2\pi} (z - x) \times \dot{z} d\omega,$$

откуда и из предыдущего соотношения

$$s = \frac{1}{2b} \int_0^{2\pi} (x - z) \times (\dot{x} - \dot{z}) d\omega = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{2} \oint_C y \times dy, \quad (1)$$

где C — кривая, описываемая вектором $y = x - z$, приведенным к одному полюсу O' .

Обозначая через σ дугу кривой C и дифференцируя по σ геометрически очевидное соотношение

$$y \times \frac{dy}{d\sigma} = b,$$

находим

$$y \times \frac{d^2y}{d\sigma^2} = 0,$$

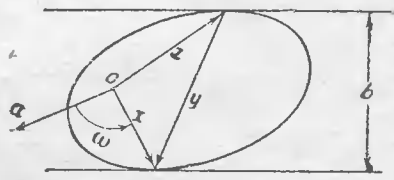
т. е. радиус-вектор y коллинеарен с нормалью к кривой C в соответствующей точке; а так как полюс O' кривой y отстоит от касательной на расстоянии b , то кривая C есть окружность.

Коэффициент при $\frac{1}{b}$ в соотношении (1) дает величину площади этой окружности, так что окончательно длина дуги овала

$$s = \frac{1}{b} \pi b^2 = \pi b.$$

Примечание. Чертеж не соответствует действительному расположению вектора y относительно направления касательных к овалу.

¹⁾ Под символом $a \times b$ мы понимаем псевдоскалярное произведение двух векторов a и b ориентированной плоскости, являющееся аналогом смешанного произведения трех векторов в трехмерном пространстве. Для наших целей его удобно определить как произведение $ab \sin(a, b)$, где (a, b) — угол, отсчитываемый от a до b против часовой стрелки. Этот угол может быть больше π .



Фиг. 1.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ШАЛЯ О ГИПЕРБОЛОИДАЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ДВУХ ТЕТРАЭДРОВ

М. П. Черняев (Ростов-на-Дону)

Пространственным аналогом теоремы Дезарга является следующая теорема Шаля: Если прямые линии, по которым пересекаются соответственные грани двух тетраэдров, являющиеся образующими однополостного гиперboloида, то и прямые линии, соединяющие соответственные вершины тетраэдров, также будут образующими того же гиперboloида.

Предметом настоящей заметки будет прямое аналитическое доказательство этой теоремы.

Пусть даны два таких тетраэдра $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, что соответственные их грани ABC и $A_1B_1C_1$, BCD и $B_1C_1D_1$, CDA и $C_1D_1A_1$, DAB и $D_1A_1B_1$ пересекаются по четырем прямолинейным образующим одной системы однополостного гиперboloида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Тогда уравнения граней этих двух тетраэдров можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} bcx - k_1acy + abz &= k_1abc, & (ABC) \\ k_2bcx + acy - k_2abz &= abc, & (BCD) \\ bcx - k_3acy + abz &= k_3abc, & (CDA) \\ k_4bcx + acy - k_4abz &= abc, & (DAB) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1bcx + acy - k_1abz &= abc, & (A_1B_1C_1) \\ bcx - k_2acy + abz &= k_2abc, & (B_1C_1D_1) \\ k_3bcx + acy - k_3abz &= abc, & (C_1D_1A_1) \\ bcx - k_4acy + abz &= k_4abc, & (D_1A_1B_1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) определим координаты вершин данных тетраэдров

$$\left. \begin{aligned} A\left(\frac{a}{k_4}, -b, -\frac{c}{k_4}\right), & B(ak_1, b, ck_1); & C\left(\frac{a}{k_2}, -b, -\frac{c}{k_2}\right); \\ & D(ak_3, b, ck_3), \\ A_1(ak_4, b, ck_4), & B_1\left(\frac{a}{k_1}, -b, -\frac{c}{k_1}\right), & C_1(ak_2, b, ck_2), \\ & D\left(\frac{a}{k_3}, -b, -\frac{c}{k_3}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Параметрические уравнения прямых, соединяющих соответственные вершины этих тетраэдров, будут

$$\left. \begin{aligned} x &= a [k_4 + (k_4^2 - 1) t_4], \\ y &= b (1 + 2k_4 t_4), \\ z &= c [k_4 + (k_4^2 + 1) t_4]; \end{aligned} \right\} (AA_1) \\ \left. \begin{aligned} x &= a [k_1 + (k_1^2 - 1) t_1], \\ y &= b (1 + 2k_1 t_1), \\ z &= c [k_1 + (k_1^2 + 1) t_1]; \end{aligned} \right\} (BB_1) \\ \left. \begin{aligned} x &= a [k_2 + (k_2^2 - 1) t_2], \\ y &= b (1 + 2k_2 t_2), \\ z &= c [k_2 + (k_2^2 + 1) t_2]; \end{aligned} \right\} (CC_1) \\ \left. \begin{aligned} x &= a [k_3 + (k_3^2 - 1) t_3], \\ y &= b (1 + 2k_3 t_3), \\ z &= c [k_3 + (k_3^2 + 1) t_3]. \end{aligned} \right\} (DD_1) \quad (5)$$

Легко убедиться, что координаты любых точек прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 тождественно удовлетворяют (при любых значениях параметров t_1, t_2, t_3, t_4) уравнению гиперболоида (1); следовательно, прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 являются прямолинейными образующими, что и требовалось доказать.

ЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ИЛИ ТРОХОИДЫ

А. Демме (Москва)

Среди кривых, изучаемых в геометрии и имеющих большое значение в приложениях, обращают на себя внимание так называемые циклоиды. Однако эти кривые рассматриваются обычно только в трех наиболее простых видах (обыкновенная циклоида, гипоциклоида и эпициклоида); лишь иногда упоминаются наряду с обыкновенной циклоидой также „удлиненная“ и „укороченная“ циклоиды.

Напомним способ образования этих кривых ¹⁾.

1. Если круг катится без скольжения по прямой линии, то каждая точка M , неподвижно связанная с ним, описывает кривую, называемую циклоидой. Обозначим через r радиус катящегося круга, через d — расстояние рассматриваемой точки M от центра круга, через x и y — декартовы координаты той же точки в тот момент, когда угол поворота катящегося круга равен φ ,

¹⁾ См., например, Бескин, Курс аналитической геометрии, ГТТИ, М. 1933, стр. 327—343.

то циклоида может быть представлена следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= r\varphi - d \sin \varphi, \\ y &= r - d \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом мы предполагаем, что круг катится по оси OX в положительном ее направлении, что в начальный момент $\varphi = 0$ центр C круга лежит на оси OY и радиус CM направлен вниз.

В таком случае будем иметь при $d < r$ укороченную циклоиду, при $d = r$ обыкновенную циклоиду, при $d > r$ удлиненную циклоиду.

2. Если круг катится без скольжения по другому неподвижному кругу по внешней его стороне, то каждая точка катящегося круга описывает кривую, называемую эпициклоидой.

В этом случае параметрические уравнения эпициклоиды будут

$$\left. \begin{aligned} x &= (R + r) \cos t - h \cos (t + \varphi), \\ y &= (R + r) \sin t - h \sin (t + \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где R — радиус неподвижного круга, центр которого находится в начале координат; r — радиус катящегося круга; t — угол, образованный линией центров кругов с положительным направлением оси OX ; φ — угол поворота катящегося круга; h — расстояние рассматриваемой точки M от центра катящегося круга.

3. Если круг катится без скольжения по другому неподвижному кругу по внутренней его стороне, то каждая точка катящегося круга описывает кривую, называемую гипоциклоидой.

Параметрические уравнения гипоциклоиды будут

$$\left. \begin{aligned} x &= (R - r) \cos t + h \cos (t - \varphi), \\ y &= (R - r) \sin t + h \sin (t - \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где R , r , t , φ и h имеют тот же смысл, как в случае (2).

Так как качение одного круга по другому происходит без скольжения, то в обоих случаях $r\varphi = Rt$, или $\varphi = \frac{R}{r}t$.

Соответственно этому уравнения (2) и (3) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R + r) \cos t - h \cos \frac{R+r}{r} t, \\ y &= (R + r) \sin t - h \sin \frac{R+r}{r} t \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

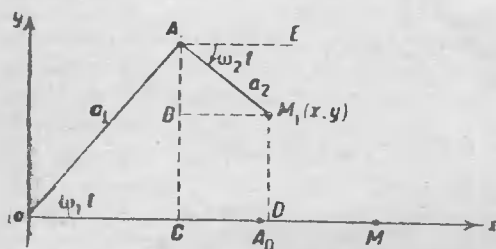
и

$$\left. \begin{aligned} x &= (R - r) \cos t + h \cos \frac{R-r}{r} t, \\ y &= (R - r) \sin t + h \sin \frac{R-r}{r} t \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

Если в уравнениях (2') и (3') положить $h=r$, то мы получим обыкновенные эпи- или гипоциклоиды; если же $h < r$, то будем иметь соответственно укороченные эпи- и гипоциклоиды; наконец, для $h > r$ будем получать удлиненные эпи- и гипоциклоиды. „Укороченные“ и „удлиненные“ эпи- и гипоциклоиды часто называют трохоидами (греческое τροχός — колесо); это название введено Робервалем, который в 1634 г. изучал обыкновенную циклоиду и нашел целый ряд ее свойств.

В иностранной литературе¹⁾, с которой пришлось ознакомиться по этому вопросу, дается и другой, на наш взгляд более изящный и, самое главное, более общий закон образования циклоидальных кривых, закон, изложения которого в русской математической литературе, насколько мне известно, не имеется. Этот второй способ образования циклоидальных кривых состоит в следующем.

Два шарнирно сочлененных между собой в точке A_0 стержня OA_0 и A_0M в начале движения расположены на одной прямой OA_0M .



Фиг. 2.

Эти два стержня вращаются, стержень OA_0 — вокруг точки O , стержень A_0M — вокруг точки A_0 ; при этом угловая скорость вращения каждого из них постоянна. При таком движении стержней точка M описывает кривую, называемую трохоидой (Radlinie, фиг. 1 и 2).

Кривые эти называются:

1) эпитрохоидой, если $\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$, — направление вращений стержней одинаково;

2) гипотрохоидой, если $\frac{\omega_1}{\omega_2} < 0$, — направление вращений стержней обратно одно другому.

Здесь ω_1 и ω_2 — угловые скорости вращения стержней OA_0 и A_0M соответственно.

Если сверх того длины стержней обозначить через a_1 и a_2 , то

1) трохоида будет „обыкновенной“, если $|a_1\omega_1| = |a_2\omega_2|$ (будет иметь заострения, точки возврата первого рода);

¹⁾ G. Loria, Algebraische und transcendente Kurven, т. 1; E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, т. 2; F. Ebner, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven, Leipzig, 1906.

2) трохоида будет „удлиненной“, если $|a_1\omega_1| < |a_2\omega_2|$ (т. е. будет иметь петли, — узловые точки);

3) трохоида будет „укороченной“, если $|a_1\omega_1| > |a_2\omega_2|$ (не будет иметь ни заострений, ни петель, — могут быть точки перегиба).

Пусть на фиг. 1 ($\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$) и фиг. 2 ($\frac{\omega_1}{\omega_2} < 0$) ломаная OA_1M_1 представляет положение движущегося сочлененного механизма OA_0M в момент t ; тогда параметрические уравнения трохоиды, которую описывает точка M , будут

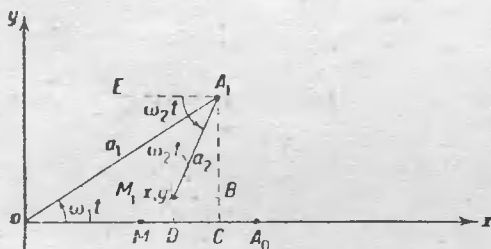
$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t, \\ y &= a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Мы рассмотрели случай, когда в начальном положении наши сочленения служат продолжением один другого. Однако может иметь место и такое положение, когда второе сочленение в начальном положении направлено прямо противоположно первому (фиг. 3). Для этого случая трохоида имеет уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \cos \omega_1 t - a_2 \cos \omega_2 t, \\ y &= a_1 \sin \omega_1 t - a_2 \sin \omega_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Эти уравнения трохоид дают возможность их исследовать, а также и строить при помощи транспорта и циркуля, если a_1 , a_2 , ω_1 и ω_2 заданы.

Для примера рассмотрим гипотрохоиду с тремя точками заострения, иногда называемую „трезубцем“. Для построения этой кривой возьмем следующие размеры: пусть $OA = 4$ см, $AM = 2$ см ($a_1 = 2a_2$); вращение OA происходит по часовой стрелке, вращение AM — против движения часовой стрелки; угловая скорость вращения AM в два раза больше угловой скорости вращения OA (т. е. $\omega_1 = -\omega_2$); следовательно, в этом случае мы имеем



Фиг. 3.

$$|a_1\omega_1| = |a_2\omega_2|.$$

Полагая для простоты $AM = a$ (тогда $OA = 2a$) и обозначая ω_1 просто через ω , приведем уравнения (4) к виду

$$\left. \begin{aligned} x &= a(2 \cos \omega t + \cos 2\omega t), \\ y &= a(2 \sin \omega t - \sin 2\omega t), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

или, полагая $\omega t = \varphi$,

$$\left. \begin{aligned} x &= a(2 \cos \varphi + \cos 2\varphi), \\ y &= a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

Это и будут параметрические уравнения гипотрохоиды с тремя заострениями (три точки возврата первого рода), известной в математической литературе под названием кривой Штейнера.

Построение этой кривой по точкам затруднений не представляет. Действительно (фиг. 4), разделив каждый квадрант радиусами на девять частей (откладывая по транспортиру дуги по 10°), в концах этих радиусов строим соответствующие положения второго сочленения и откладываем всякий раз его длину; такие построения дают нам точки кривой B, B_1, B_2, \dots ; соединяя их плавной кривой, получим кривую Штейнера, представляющую собой три отдельные звена, завершающиеся точками заострения.

Уравнения касательной в той точке этой кривой, для которой $\varphi = \varphi_1$, запишется так:

$$x \sin \frac{\varphi_1}{2} + y \cos \frac{\varphi_1}{2} = a \sin \frac{3\varphi_1}{2},$$

и уравнение нормали в той же точке $\varphi = \varphi_1$ будет

$$x \cos \frac{\varphi_1}{2} - y \sin \frac{\varphi_1}{2} = 3a \cos \frac{3\varphi_1}{2};$$

радиус кривизны в той же точке $\varphi = \varphi_1$ будет

$$R = 8a \sin \frac{3\varphi_1}{2}. \quad (9)$$

Из той же системы (6') найдем, что дифференциал дуги

$$ds = 4a \sin \frac{3\varphi}{2} d\varphi. \quad (10)$$

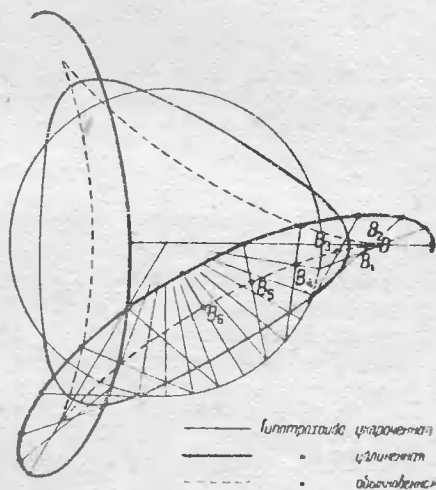
Интегрируя это соотношение в пределах от 0 до φ_1 , получим, что длина дуги в этом интервале изменения φ будет

$$s_{\varphi_1} = \frac{8a}{3} \left(1 - \cos \frac{3\varphi_1}{2} \right) = \frac{16}{3} a \sin^2 \frac{3\varphi_1}{4}.$$

Если взять $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$, т. е. вычислить длину первого звена кривой Штейнера, то оказывается, что $s = \frac{16a}{3}$ и, следовательно, длина всей кривой равна $16a$.

Если вычислить длину этой кривой в пределах от φ_1 до $\frac{\pi}{3}$, то получим, что

$$3s = 8a \cos \frac{3\varphi_1}{2}. \quad (11)$$



Фиг. 4.

Возведя в квадрат (9) и (11) и складывая их, получим так называемое натуральное уравнение кривой Штейнера:

$$9s^2 + R^2 = 64a^2.$$

Далее легко показать, что для так называемой „астероиды“ (гипоциклоиды с четырьмя заострениями) надо взять угловую скорость вращения для второго звена в три раза больше первого, а длину второго звена в три раза меньше первого: $a_1 = 3a_2$, т. е. чтобы соблюдалось соотношение

$$|a_1\omega_1| = |a_2\omega_2|.$$

И вообще, желая получить гипоциклоиду с n заострениями, надо подобрать длины стержней и угловые скорости их вращения так, чтобы

$$a_1 = (n-1)a_2, \quad (n-1)\omega_1 = \omega_2.$$

Если соотношение $|a_1\omega_1| = |a_2\omega_2|$ не соблюдено, то мы будем иметь или укороченную гипотрохиду, если $|a_1\omega_1| > |a_2\omega_2|$, или удлинненную, если $|a_1\omega_1| < |a_2\omega_2|$, как это видно на фиг. 4, на котором они построены на основе следующих значений рассматриваемых величин:

1. Для трохоиды обыкновенной

$$a_1 = 4 \text{ см}, \quad a_2 = 2 \text{ см}, \quad \omega_2 = -2\omega_1; \quad |a_1\omega_1| = |a_2\omega_2|.$$

2. Для трохоиды укороченной

$$a_1 = 4 \text{ см}, \quad a_2 = 0,75 \text{ см}, \quad \omega_2 = -2\omega_1; \quad |a_1\omega_1| > |a_2\omega_2|.$$

3. Для трохоиды удлинненной

$$a_1 = 4 \text{ см}, \quad a_2 = 3 \text{ см}, \quad \omega_2 = -2\omega_1; \quad |a_1\omega_1| < |a_2\omega_2|.$$

Рассмотрим теперь эпитрохиду, для которой возьмем угловую скорость вращения второго сочленения в пять раз большую (фиг. 5), т. е. $\omega_2 = 5\omega_1$; тогда, подбирая $a_1 = 7 \text{ см}$ и $a_2 = 1,40 \text{ см}$, имеем обыкновенную эпитрохиду; если $a_1 = 7 \text{ см}$, $a_2 = 6 \text{ см}$ — удлинненную эпитрохиду; если $a_1 = 7 \text{ см}$, $a_2 = 0,5 \text{ см}$ — укороченную эпитрохиду.

Построение кривых видно на фиг. 5. В этом случае количество точек заострения $n-1$ определяется из отношения $\frac{\omega_2}{\omega_1} = n$.

Если $n = \frac{p}{q}$ число дробное, то кривая замыкается только через pq полных оборотов первого сочленения. Если же n число иррациональное, то кривая вообще не будет замыкаться.

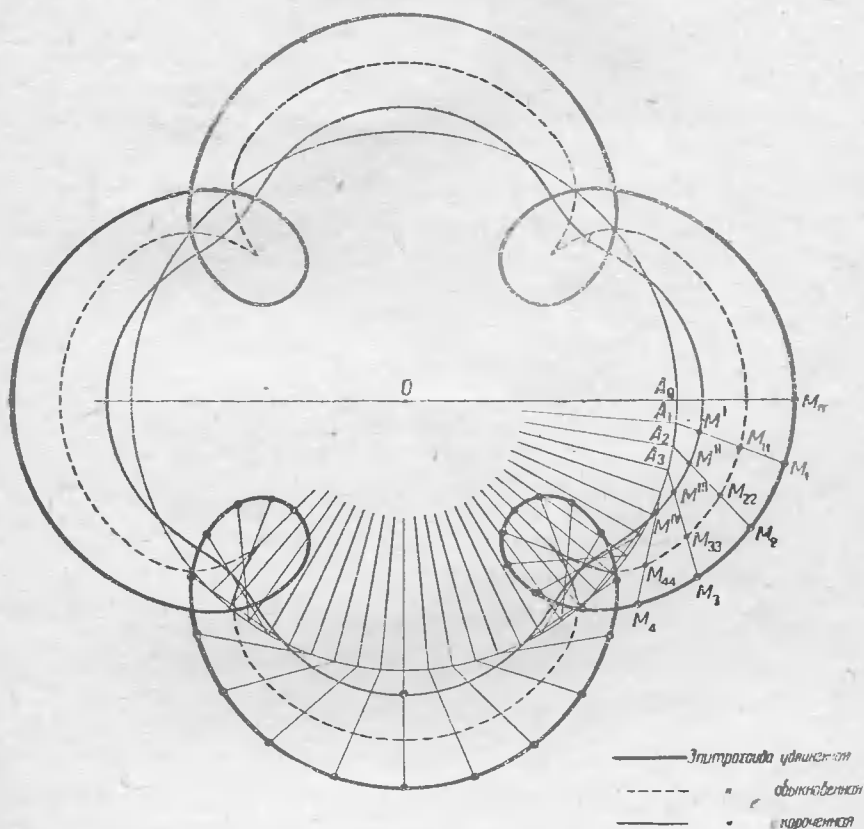
Соответствующее этому замечание надо сделать и в отношении гипотрохонд.

Остановимся еще на некоторых частных случаях, которые получаются при определенных соотношениях a_1 , a_2 , ω_1 , ω_2 .

1. Если для обыкновенной гипотрохида (с заострениями) имеет место соотношение $\frac{\omega_1}{\omega_2} = -1$ и, следовательно, $a_1 = a_2$, то основные уравнения (5) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2a \cos \varphi, \\ y &= 0, \end{aligned} \right\} (a_1 = a_2 = a, \quad \omega_1 t = \omega_2 t = \varphi),$$

т. е. гипотрохида вырождается в отрезок прямой линии, лежащей на оси OX .



Фиг. 5.

2. Если же $\frac{\omega_1}{\omega_2} = -1$, но $a_1 \neq a_2$ (пусть $a_1 > a_2$), то основные уравнения (4) обращаются в следующие:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_1 t = (a_1 + a_2) \cos \omega_1 t, \\ y &= a_1 \sin \omega_1 t - a_2 \sin \omega_1 t = (a_1 - a_2) \sin \omega_1 t. \end{aligned}$$

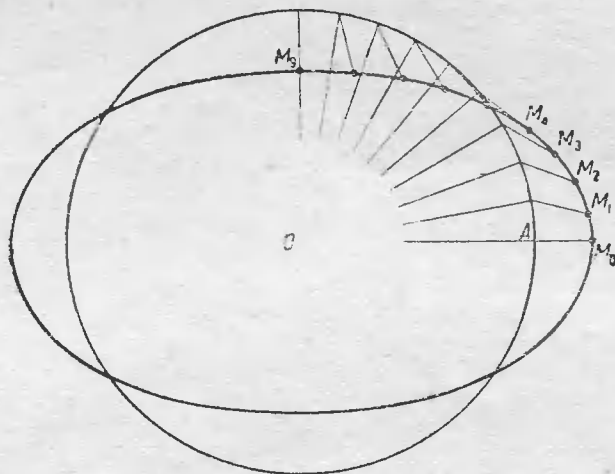
Определяя из них

$$\sin \omega_1 t = \frac{y}{a_1 - a_2}, \quad \cos \omega_1 t = \frac{x}{a_1 + a_2},$$

возводя эти уравнения в квадрат и складывая их, мы получаем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{(a_1 + a_2)^2} + \frac{y^2}{(a_1 - a_2)^2} = 1,$$

полуоси которого соответственно равны $a_1 + a_2$ и $a_1 - a_2$ (фиг. 6). Следовательно, эллипс есть один из видов укороченной гипотрохи.



Фиг. 6.

3. Если в уравнениях (7) для эпитрохицы положить $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$,
 $a_1 = 2a$, $a_2 = b$ ($2a > b$) и $\omega_1 t = \varphi$,

то эти уравнения запишутся так:

$$x = 2a \cos \varphi - b \cos 2\varphi,$$

$$y = 2a \sin \varphi - b \sin 2\varphi,$$

или

$$x - b = 2 \cos \varphi (a - b \cos \varphi),$$

$$y = 2 \sin \varphi (a - b \cos \varphi).$$

Введя обозначение $2(a - b \cos \varphi) = \rho$, получим

$$x - b = \rho \cos \varphi,$$

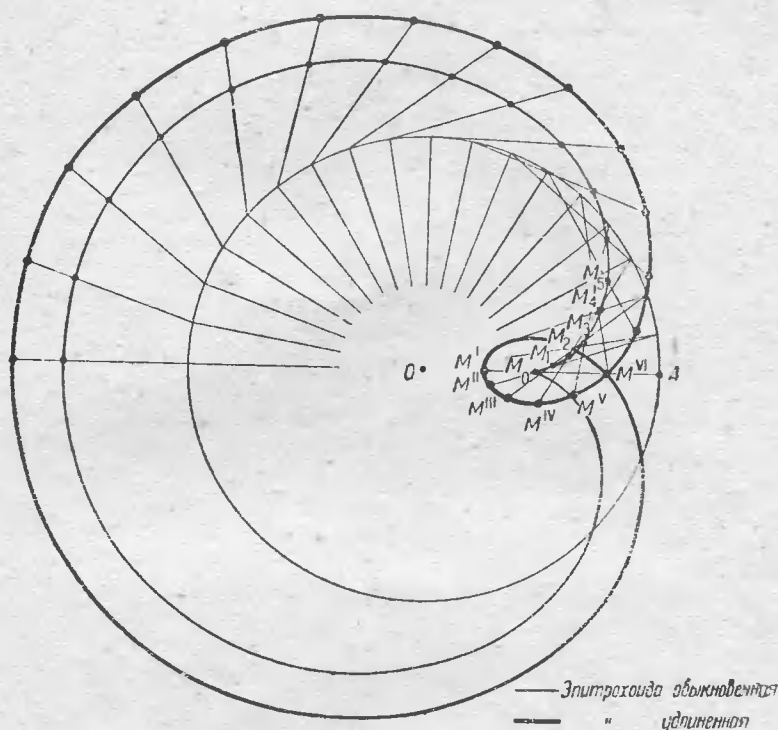
$$y = \rho \sin \varphi,$$

и, следовательно, равенство $\rho = 2(a - b \cos \varphi)$ есть уравнение такой удлиненной эпитрохицы в полярных координатах, а это, как известно, есть уравнение улитки Паскаля, каковая вырождается в обыкновенную эпициклоиду, если положить $b = a$; уравнение ее в этом случае будет

$$\rho = 2a(1 - \cos \varphi)$$

(уравнение кардиоиды в полярных координатах).

Эти случаи иллюстрируются фиг. 7, на которой показано образование этих кривых с помощью рассмотренного шарнирного механизма.



Фиг. 7.

4. Если в уравнениях (4) положить $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$, то, как легко видеть, при любых значениях a_1 и a_2 , будем иметь

$$x = (a_1 + a_2) \cos \omega t,$$

$$y = (a_1 + a_2) \sin \omega t,$$

или, заменяя $\omega t = \varphi$, получим

$$x = (a_1 + a_2) \cos \varphi,$$

$$y = (a_1 + a_2) \sin \varphi,$$

а эти уравнения представляют параметрические уравнения окружности с радиусом, равным $a_1 + a_2$. Следовательно, окружность есть один из видов эпитрохоид.

5. Если в уравнениях (4) положить $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{3}$ и $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$, то получим эпитрохоиду с двумя заострениями, называемую нефроидой, уравнения которой будут

$$x = 3a \cos \omega t + a \cos 3\omega t,$$

$$y = 3a \sin \omega t + a \sin 3\omega t.$$

Очевидно, что можно получить эпитрохоиду с двумя петлями (удлиненную, если выбрать a_1 и a_2 так, чтобы $|\omega_1 a_1| < |\omega_2 a_2|$).

Изложенный здесь способ построения циклоидальных кривых, или трохойд, охватывает весьма широкий класс их и, между прочим, включает в себя так называемые многолепестковые розы¹⁾, которые являются частным случаем гипотрохойд, у которых $a_1 = a_2$ и $\omega_2 = -p\omega_1$, или $|a_1 \omega_1| < |a_2 \omega_2|$, т. е. удлиненными гипоциклоидами.

Несколько слов по вопросу об истории учения о циклоиде.

Идея образования обыкновенной циклоиды всегда представлялась легкой, например, если наблюдать за движением колеса повозки, фиксируя свое внимание на перемещении какой-либо точки на ободе этого колеса.

У Ямблеха говорится в одном месте о „линии двойного движения“, открытой Карпом из Антиохии, что условно можно считать первыми сведениями об этой кривой; все же этого недостаточно, чтобы сказать, что циклоида — кривая, известная с древних времен. Имя Карла Бувелла, известного своими выступлениями в 1501 г. с проблемой о квадратуре круга, связывается и с открытием циклоиды; однако надо считать первым открывшим и давшим ей название циклоиды Галилея (1599). Именно эти имена связываются с началом изучения этой кривой.

П. Мерзен получив, повидимому, сведения о циклоиде от учеников Галилея в 1862 г., сообщил об этом Робервалю, который уже в 1634 г. нашел, что площадь обыкновенной циклоиды равняется тройной площади производящего круга. К этому же времени (1638 г.) относится проявленное к циклоиде внимание Декарта и Ферма. В это же примерно время Врен решил задачу о спрямлении дуги этой кривой, а знаменитый Паскаль (1623—1662), „отец математики и философии“, открыл и дал доказательства целого ряда замечательных и изящных свойств циклоиды. Паскаль называл циклоиды рулеттами.

Таким образом изучение свойств циклоиды насчитывает больше 300 лет, но во времена Паскаля изучалась, главным образом, обыкновенная циклоида, споры и диспуты о свойствах которой, о приоритете открытий их, занимают большое и интересное место в сочинениях Паскаля²⁾.

¹⁾ См. мою статью о них в журн. „Математика и физика в средней школе“, № 1, 1935.

²⁾ В системе мира Птолемея пути планет являются не чем иным, как трохойдами, а иногда и более сложными кривыми, которые могут быть получены с помощью шарнирного механизма, состоящего не из двух, а из трех и более стержней. Поэтому следует думать, что уже в древности трохойды были довольно хорошо известны. (Прим. ред.)

СВОЙСТВА ТОЧКИ НАИМЕНЬШЕГО РАССТОЯНИЯ ОТ ЧЕТЫРЕХ ТОЧЕК ПРОСТРАНСТВА

М. К. Гребенча (Москва)

Задача Торичелли (Toricelli)¹⁾, известная под названием задачи о точке наименьшего расстояния, обобщенная Штейнером, разрешена для некоторых частных случаев. Точка наименьшего расстояния от трех данных точек плоскости, т. е. точка, сумма расстояний которой до этих трех точек имеет наименьшую величину, расположена так, что прямые, соединяющие эту точку с данными, образуют углы в 120° (Торичелли, Кавальери). Если один из углов треугольника, вершинами которого являются данные точки, больше 120° , то искомая точка совпадает с вершиной этого угла (Гейсен, Heipen). В частности, если эти точки расположены на одной прямой, то искомая точка совпадает с той из трех данных точек, которая лежит между двумя другими.

Если отыскивается точка наименьшего расстояния от четырех точек плоскости, являющихся вершинами выпуклого четырехугольника, то искомая точка совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырехугольника.

Если даны четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости, то соединив искомую точку с данными прямыми и проведя через эти прямые плоскости, получим четыре равных телесных угла в π стерадианов каждый.

Задача усложняется, если при отыскании точки наименьшего расстояния сумма расстояний образуется из расстояний, помноженных на соответствующие, постоянные коэффициенты. Эта задача решена для любого числа точек, лежащих на одной прямой, и для трех точек плоскости.

В случае трех точек плоскости решение задачи таково: искомая точка расположена так, что синусы углов, образованных прямыми, соединяющими эту точку с данными, пропорциональны коэффициентам, на которые помножаются расстояния. Простое геометрическое построение дано Лонгардтом (Laungardt).

Рассмотрим аналогичную задачу для случая четырех точек пространства.

Пусть даны в пространстве четыре точки $A_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$); пусть отыскивается точка $A(\alpha, \beta, \gamma)$ такая, что

$$\sum_{i=1}^4 p_i A A_i = \text{minimum}, \quad (1)$$

где p_i — постоянные числа.

Требование (1) можем переписать так:

$$u = \sum_{i=1}^4 p_i \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} = \sum_{i=1}^4 p_i r_i = \min.$$

Очевидно, координатами искомой точки служат вещественные корни системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^4 p_i \frac{x-x_i}{r_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^4 p_i \frac{y-y_i}{r_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^4 p_i \frac{z-z_i}{r_i} = 0. \quad (2)$$

Пусть корни этой системы $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ служат координатами точки A .

¹⁾ М. К. Гребенча, Точка наименьшего расстояния от четырех точек пространства („Математическое образование“, 1927).

Проводим прямые, соединяющие точку A с точками A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Опишем из точки A как из центра шаровую поверхность радиусом равным 1. Пусть точки пересечения поверхности с прямыми AA_i суть B_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Уравнение этой шаровой поверхности есть

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 1.$$

Уравнение прямой AA_i есть

$$\frac{x - \alpha}{x_i - \alpha} = \frac{y - \beta}{y_i - \beta} = \frac{z - \gamma}{z_i - \gamma} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Решая совместно эту систему уравнений, мы вычислим координаты точки B_i .

$$\alpha + \frac{x_i - \alpha}{r_i}, \quad \beta + \frac{y_i - \beta}{r_i}, \quad \gamma + \frac{z_i - \gamma}{r_i}.$$

Если точка A не лежит в одной плоскости ни с какими тремя из точек B_i ($i = 1, 2, 3, 4$), то, проведя плоскости через каждые три точки из пяти A, B_1, B_2, B_3, B_4 , получим четыре пирамиды $AB_1B_2B_3, AB_1B_2B_4, AB_1B_3B_4, AB_2B_3B_4$. Вычислим объем, например, пирамиды $B_2B_3B_4A$:

$$v_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \alpha + \frac{x_2 - \alpha}{r_2} & \beta + \frac{y_2 - \beta}{r_2} & \gamma + \frac{z_2 - \gamma}{r_2} & 1 \\ \alpha + \frac{x_3 - \alpha}{r_3} & \beta + \frac{y_3 - \beta}{r_3} & \gamma + \frac{z_3 - \gamma}{r_3} & 1 \\ \alpha + \frac{x_4 - \alpha}{r_4} & \beta + \frac{y_4 - \beta}{r_4} & \gamma + \frac{z_4 - \gamma}{r_4} & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из элементов каждой строки элементы последней строки, получаем

$$v_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \frac{x_2 - \alpha}{r_2} & \frac{y_2 - \beta}{r_2} & \frac{z_2 - \gamma}{r_2} & 0 \\ \frac{x_3 - \alpha}{r_3} & \frac{y_3 - \beta}{r_3} & \frac{z_3 - \gamma}{r_3} & 0 \\ \frac{x_4 - \alpha}{r_4} & \frac{y_4 - \beta}{r_4} & \frac{z_4 - \gamma}{r_4} & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \frac{x_2 - \alpha}{r_2} & \frac{y_2 - \beta}{r_2} & \frac{z_2 - \gamma}{r_2} \\ \frac{x_3 - \alpha}{r_3} & \frac{y_3 - \beta}{r_3} & \frac{z_3 - \gamma}{r_3} \\ \frac{x_4 - \alpha}{r_4} & \frac{y_4 - \beta}{r_4} & \frac{z_4 - \gamma}{r_4} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где

$$l_i = \frac{x_i - \alpha}{r_i}, \quad m_i = \frac{y_i - \beta}{r_i}, \quad n_i = \frac{z_i - \gamma}{r_i}.$$

Рассуждая аналогичным образом, придем к заключению, что

$$v_2 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} l_3 & m_3 & n_3 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{6p_1} \begin{vmatrix} l_3 & m_3 & n_3 \\ p_1 l_1 & p_1 m_1 & p_1 n_1 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6p_1} \begin{vmatrix} l_3 & m_3 & n_3 \\ p_1 l_1 + p_3 l_3 + p_4 l_4 & p_1 m_1 + p_3 m_3 + p_4 m_4 & p_1 n_1 + p_3 n_3 + p_4 n_4 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь к элементам второй строки прибавлены элементы первой строки, умноженные на p_3 , и элементы третьей строки, умноженные на p_4 . В силу равенств (2)

$$\begin{aligned} p_1 l_1 + p_3 l_3 + p_4 l_4 &= -p_2 l_2, \\ p_1 m_1 + p_3 m_3 + p_4 m_4 &= -p_2 m_2, \\ p_1 n_1 + p_3 n_3 + p_4 n_4 &= -p_2 n_2. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения во вторую строку определителя, переставив первую и вторую строки и вынеся p_2 за знак определителя, получим последовательно

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{6p_1} \begin{vmatrix} l_3 & m_3 & n_3 \\ -p_2 l_2 & -p_2 m_2 & -p_2 n_2 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6p_1} \begin{vmatrix} p_2 l_2 & p_2 m_2 & p_2 n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{p_2}{6p_1} \begin{vmatrix} l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

или, окончательно, воспользовавшись равенством (3), получим

$$v_2 = \frac{p_2}{p_1} v_1,$$

т. е.

$$\frac{v_1}{p_1} = \frac{v_2}{p_2}.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\frac{v_1}{p_1} = \frac{v_2}{p_2} = \frac{v_3}{p_3} = \frac{v_4}{p_4}. \quad (4)$$

Это свойство точки наименьшего расстояния аналогично случаю трех точек плоскости. В самом деле, если даны три точки плоскости A_i и если искомую точку A наименьшего расстояния соединить с точками A_i прямыми, то, как известно, синусы углов между этими прямыми пропорциональны коэффициентам p_i , т. е.

$$\frac{\sin \delta_i}{p_i} = \text{const.}$$

Если из точки A как из центра опишем окружность радиусом, равным 1, то прямые AA_i пересекут окружность в точках B_i . Площади S_i равнобедренных треугольников AB_iB_j пропорциональны синусам углов при вершине A ; следовательно,

$$\frac{S_i}{p_i} = \text{const.}$$

Если мы на каждой прямой AA_i ($i = 1, 2, 3, 4$) отложим отрезок AC_i равный p_i , то, проведя плоскости через каждые три точки из пяти: A, C_1, C_2, C_3, C_4 , мы получим четыре пирамиды $AC_1C_2C_3, AC_1C_2C_4, AC_1C_3C_4, AC_2C_3C_4$, объемы которых обозначим через v_4, v_3, v_2, v_1 . Координаты точек C_i будут $(\alpha + l_i p_i, \beta + m_i p_i, \gamma + n_i p_i)$, а потому

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \alpha + l_2 p_2 & \beta + m_2 p_2 & \gamma + n_2 p_2 & 1 \\ \alpha + l_3 p_3 & \beta + m_3 p_3 & \gamma + n_3 p_3 & 1 \\ \alpha + l_4 p_4 & \beta + m_4 p_4 & \gamma + n_4 p_4 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из всех строк элементы последней строки и вынося множители p_2, p_3, p_4 за знак определителя, получим последовательно

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} l_2 p_2 & m_2 p_2 & n_2 p_2 & 0 \\ l_3 p_3 & m_3 p_3 & n_3 p_3 & 0 \\ l_4 p_4 & m_4 p_4 & n_4 p_4 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} l_2 p_2 & m_2 p_2 & n_2 p_2 \\ l_3 p_3 & m_3 p_3 & n_3 p_3 \\ l_4 p_4 & m_4 p_4 & n_4 p_4 \end{vmatrix} = \frac{p_2 p_3 p_4}{6} \begin{vmatrix} l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (3), получим

$$\bar{v}_1 = \frac{p_2 p_3 p_4}{6} v_1,$$

или

$$\frac{v_1}{p_1} = \frac{\bar{v}_1}{6 p_1 p_2 p_3 p_4}.$$

Подобным же образом

$$\frac{v_2}{p_2} = \frac{\bar{v}_2}{6 p_1 p_2 p_3 p_4}, \quad \frac{v_3}{p_3} = \frac{\bar{v}_3}{6 p_1 p_2 p_3 p_4}, \quad \frac{v_4}{p_4} = \frac{\bar{v}_4}{6 p_1 p_2 p_3 p_4}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (4), получим

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = \bar{v}_4.$$

Следовательно, точка наименьшего расстояния обладает тем свойством, что пирамиды, имеющие общую вершину в этой точке, имеют равные объемы, если ребра их, сходящиеся в этой вершине, проходят через данные точки и имеют длины, пропорциональные массам этих точек.

В предшествующем рассуждении мы допускали заранее, что искомая точка A лежит внутри пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$. Легко показать, что, действительно, точка A не может лежать вне этой пирамиды. Предположим, например, что искомая точка A лежит вне пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$, причем A и, например, A_1 расположены по разные стороны плоскости $A_2 A_3 A_4$. Спроектируем точку A на плоскость $A_2 A_3 A_4$ и пусть точка B является проекцией точки A . Соединим точки A_i с B и A . Следовательно, отрезки $A_2 B$, $A_3 B$, $A_4 B$ являются проекциями отрезков $A_2 A$, $A_3 A$, $A_4 A$; поэтому

$$A_2 B < A_2 A, \quad A_3 B < A_3 A, \quad A_4 B < A_4 A.$$

Помножая обе части каждого из неравенств соответственно на p_2 , p_3 , p_4 и складывая, мы получим, что

$$p_2 \cdot A_2 B + p_3 \cdot A_3 B + p_4 \cdot A_4 B < p_2 \cdot A_2 A + p_3 \cdot A_3 A + p_4 \cdot A_4 A.$$

Так как A_1 и A лежат по разные стороны плоскости $A_2 A_3 A_4$ и, кроме того, AB есть перпендикуляр к этой плоскости, следовательно, угол $A_1 B A$ тупой, то $A_1 B < A_1 A$ и

$$p_1 \cdot A_1 B < p_1 \cdot A_1 A.$$

Складывая почленно полученные неравенства, получим, что

$$p_1 \cdot A_1 B + p_2 \cdot A_2 B + p_3 \cdot A_3 B + p_4 \cdot A_4 B < p_1 \cdot A_1 A + p_2 \cdot A_2 A + p_3 \cdot A_3 A + p_4 \cdot A_4 A.$$

Таким образом мы приходим к заключению, что сумма расстояний от точки B , умноженных на соответствующие коэффициенты, меньше, чем соответственная сумма расстояний от точки A . Следовательно, точка A , лежащая вне пирамиды, искомой точкой

быть не может. Покажем теперь, что искомая точка, если она не совпадает с одной из вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$, не может лежать на грани пирамиды.

Предположим противное. Пусть искомая точка A лежит на грани $A_2A_3A_4$, не совпадая с A_2 , A_3 или A_4 . Мы видели, что координаты (α, β, γ) искомой точки должны удовлетворять системе уравнений (1). Числа $\frac{\alpha-x_i}{r_i}$, $\frac{\beta-y_i}{r_i}$, $\frac{\gamma-z_i}{r_i}$ суть косинусы углов, образованных отрезками AA_i с положительными направлениями координатных осей.

Мы можем выбрать положение координатной системы так, чтобы точки A_2, A_3, A_4 , а следовательно, и A лежали в плоскости XOY ; в таком случае $z_2 = z_3 = z_4 = \gamma = 0$. Так как по условию $r_i \neq 0$, ибо точка A не совпадает ни с одной из данных точек, то числа $\frac{\gamma-z_2}{r_2}$, $\frac{\gamma-z_3}{r_3}$, $\frac{\gamma-z_4}{r_4}$ равны нулю; следовательно, третье уравнение системы (1) имеет вид

$$\frac{-p_1 z_1}{r_1} = 0.$$

Так как p_1 не равно нулю, то приходим к заключению, что $z_1 = 0$, т. е. что и четвертая точка A_1 лежит в плоскости XOY , а это противоречит основному условию, ибо точки A_i не лежат в одной плоскости.

Итак, мы приходим к заключению, что, если искомая точка не совпадает с одной из данных, то она обязательно находится внутри пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ и, следовательно, обладает доказанными выше свойствами.

К ТЕОРИИ ТРЕХЧЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Скрылев (Харьков)

Вычисление дискриминанта

Дискриминант уравнения

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

отличается от результата функции $f(x)$ и ее производной

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)A_1 x^{n-2} + \dots + 2A_{n-2} x + A_{n-1}$$

лишь множителем $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. На основании этого дискриминант D этого уравнения можно представить двояко:

или в виде

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(a_0) f'(a_1) \dots f'(a_{n-1}),$$

или в виде

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n f(\beta_0) f(\beta_1) \dots f(\beta_{n-2}),$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}$ — корни соответственно функций $f(x)$ и $f'(x)$ ¹⁾. Что же касается уравнения

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n = 0, \quad (1)$$

то при $A_0 \neq 1$ за дискриминант его принимают или

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A_0^{-1} A_0^{n-1} f'(\alpha_0) f'(\alpha_1) \dots f'(\alpha_{n-1}), \quad (2)$$

или

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A_0^{-1} A_0^n n^n f(\beta_0) f(\beta_1) \dots f(\beta_{n-2}). \quad (3)$$

Объясняется это тем, что в этом случае результат функций $f(x)$ и $f'(x)$, т. е. произведение

$$A_0^{n-1} f'(\alpha_0) f'(\alpha_1) \dots f'(\alpha_{n-1})$$

или

$$A_0^n n^n f(\beta_0) f(\beta_1) \dots f(\beta_{n-2}),$$

будучи выражен через коэффициенты уравнения (1), имеет множитель A_0 . Чтобы обнаружить этот множитель, достаточно рассматриваемый результат представить в виде определителя. Действительно, тогда найдем, что, например,²⁾

$$= \left. \begin{array}{ccccccccc} A_0 & A_1 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_0 & \dots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_n \\ nA_0 & (n-1)A_1 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & nA_0 & (n-1)A_1 & (n-2)A_2 & \dots & A_{n-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-1 \\ n \end{array}$$

Элементы первого столбца этого определителя $(2n-1)$ -го порядка имеют общий множитель A_0 , который, как известно, можно выносить за знак определителя.

¹⁾ Г. М. Шапиро, Высшая алгебра, 1935, стр. 125; Л. Я. Окунев, Высшая алгебра, 1937, § 51.

²⁾ К этому равенству мы придем, применяя формулу для результата двух функций, представленного в виде определителя. См. Б. Букреев, Элементы алгебраического анализа, 1912, стр. 112.

В настоящей статье мы воспользуемся формулами (2) и (3) для определения дискриминанта трехчленного уравнения

$$f(x) = A_0 x^n + A_k x^{n-k} + A_n = 0. \quad (4)$$

Сначала рассмотрим случай, когда числа n и k взаимно простые.

Так как

$$f'(x) = [nA_0 x^{n-1} + (n-k) A_k] x^{n-k-1},$$

то среди корней $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \dots, \beta_{n-2}$ производной $f'(x)$ $n-k-1$ корней равны нулю. Пусть корнями отличными от нуля будут $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}$.

Имея в виду для решения поставленной задачи при взаимно простых n и k воспользоваться формулой (3), займемся прежде всего произведением

$$f(\beta_0) f(\beta_1) \dots f(\beta_{n-2}) = A_n^{n-k-1} \prod_{i=0}^{k-1} (A_0 \beta_i^n + A_k \beta_i^{n-k} + A_n).$$

Ввиду того что β_i — корень уравнения

$$nA_0 x^k + (n-k) A_k = 0, \quad (5)$$

то стоящий под знаком произведения общий его член

$$A_0 \beta_i^n + A_k \beta_i^{n-k} + A_n = \frac{A_n (n-k) - k A_0 \beta_i^n}{n-k},$$

откуда следует, что

$$f(\beta_0) f(\beta_1) \dots f(\beta_{n-2}) = (n-k)^{-k} A_n^{n-k-1} \prod_{i=0}^{k-1} [A_n (n-k) - k A_0 \beta_i^n]. \quad (6)$$

Если ε — примитивный корень уравнения $x^k = 1$, то, обозначая выражение $\sqrt[k]{-\frac{n-k}{n} \cdot \frac{A_k}{A_0}}$ ради краткости через R , найдем, что при соответствующем способе нумерации корней уравнения (5)

$$\beta_i = \varepsilon^i R \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

Подставляя это выражение для β_i в правую часть равенства (6) будем иметь

$$f(\beta_0) f(\beta_1) \dots f(\beta_{n-2}) = (n-k)^{-k} A_n^{n-k-1} \prod_{i=0}^{k-1} [A_n (n-k) - \varepsilon^{in} k R^n A_0]. \quad (7)$$

Показатель i при ε пробегает полную систему вычетов по модулю k :

$$i = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Так как n взаимно простое с k , то такую же систему вычетов по модулю k будет пробегать и произведение in . Вследствие этого равенство (7) приводится к более простому:

$$f(\beta_0) f(\beta_1) \dots f(\beta_{n-2}) = (n-k)^{-k} A_n^{n-k-1} \prod_{i=0}^{k-1} [A_n(n-k) - \varepsilon^i k R^n A_0].$$

Правая часть этого равенства, разделенная на $(n-k)^{-k} A_n^{n-k-1}$, есть не что иное, как значение функции

$$x^k - k^k R^{nk} A_0^k = (x - k R^n A_0)(x - \varepsilon k R^n A_0) \dots (x - \varepsilon^{k-1} k R^n A_0)$$

при $x = A_n(n-k)$. Стало быть, принимая во внимание значение R ,

$f(\beta_0) f(\beta_1) \dots f(\beta_{n-2}) = A_n^{n-k-1} [A_n^k - (-1)^n k^k (n-k)^{n-k} n^{-n} A_0^{k-n} A_n^n]$, откуда на основании (3) находим, что при n и k взаимно простых уравнение (4) имеет дискриминант

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A_0^{k-1} A_n^{n-k-1} [n^n A_0^{n-k} A_n^k - (-1)^n k^k (n-k)^{n-k} A_n^n], \quad (8)$$

или

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} k^k n^{n-k} A_0^{n-1} A_k^k A_n^{n-k-1} \left[\left(\frac{n}{k} \cdot \frac{A_n}{A_k} \right)^k - (-1)^n \left(\frac{n-k}{n} \cdot \frac{A_k}{A_0} \right)^{n-k} \right].$$

Теперь переходим к самому общему случаю, когда n и k в уравнении (4) имеют общий наибольший делитель d , равный 1 или отличный от нее. Если $n = dm$ и $k = dr$, то, полагая $x^d = y$, преобразуем уравнение (4) в трехчленное уравнение

$$\varphi(x) = A_0 y^m + A_k y^{m-r} + A_n = 0 \quad (9)$$

степени m . Таким образом каждому корню y_i уравнения (9) соответствует d корней:

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{id}$$

уравнения (4), обладающих свойством

$$\alpha_{ij}^d = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, d).$$

Установив это, обращаемся к формуле (2). С помощью ее найдем, что дискриминант уравнения (4)

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A_0^{n-2} \prod_{j=1}^{i=m} \alpha_{ij}^{n-k-1} [n A_0 \alpha_{ij}^k + (n-k) A_k],$$

$i, j=1$

или на основании только что сказанного

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A_0^{n-2} \prod_{i=1}^{i=m} y_i^{(m-r)d} [n A_0 y_i^r + (n-k) A_k]^d \cdot \prod_{j=1}^{j=d} \alpha_{ij}^{-1}.$$

$i, j=1$

Но

$$y_i^{m-r} \cdot [nA_0 y_i^r + (n-k) A_k] = \\ = dy_i [mA_0 y_i^{m-1} + (m-r) A_k y_i^{m-r-1}] = dy_i \varphi'(y_i)$$

и

$$\prod a_{ij}^{-1} = (-1)^n A_0 A_n^{-1},$$

поэтому

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} d^n A_0^{n-1} A_n^{-1} \prod_{i=1}^{i=m} y_i^d \varphi'(y_i)^d,$$

или

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d^n A_0^{n-d-1} A_n^{d-1} \prod_{i=1}^{i=m} \varphi'(y_i)^d,$$

так как

$$\prod_{i=1}^{i=m} y_i^d = (-1)^n A_0^{-d} A_n^d.$$

Выражение

$$(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} A_0^{m-2} \prod_{i=1}^{i=m} \varphi'(y_i),$$

будучи дискриминантом уравнения (9), равно на основании (8)

$$(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} A_0^{r-1} A_n^{m-r-1} [m^m A_0^{m-r} A_n^r - (-1)^m r^r (m-r)^{m-r} A_k^m].$$

Значит,

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d^n A_0^{k-1} A_n^{n-k-1} [m^m A_0^{m-r} A_n^r - (-1)^m r^r (m-r)^{m-r} A_k^m]^d,$$

или

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} k^k n^{n-k} A_0^{n-1} A_k^k A_n^{n-k-1} \left[\left(\frac{m}{r} \cdot \frac{A_n}{A_k} \right)^r - \right. \\ \left. - (-1)^m \left(\frac{m-r}{m} \cdot \frac{A_k}{A_0} \right)^{m-r} \right]^d.$$

Эти равенства и суть окончательные формулы для дискриминанта какого угодно трехчленного уравнения.

Исследование корней

До сего времени речь шла о каких угодно трехчленных уравнениях, т. е. коэффициенты их были комплексными числами. Приступая здесь к исследованию корней трехчленного уравнения предположим, что коэффициенты его суть действительные числа причем для определенности будем считать $A_0 > 0$.

Как мы сейчас убедимся, всякий раз, когда теорема Декарта, не дает точного ответа о числе действительных корней трех-

членного уравнения (4), это число можно установить, определяя знак в выражении

$$\Delta = m^m A_0^{m-r} A_n^r - (-1)^m r^r (m-r)^{m-r} A_k^m.$$

В основу предстоящего исследования положим следующие два замечания:

а) уравнение с действительными коэффициентами, лишенное кратных корней, имеет четное или нечетное число пар сопряженных комплексных корней в зависимости от того, положительный или отрицательный его дискриминант;

б) если в уравнении с действительными коэффициентами между двумя членами отсутствует m рядом стоящих членов, то уравнение имеет по крайней мере m или $m \pm 1$ комплексных корней, смотря по тому, четное или нечетное m , причем во втором случае число комплексных корней равно $m+1$, если отсутствующие члены лежат между коэффициентами с одинаковыми знаками, и $m-1$, если эти коэффициенты имеют разные знаки.

В силу последнего замечания нижняя граница числа комплексных корней в уравнении (4) зависит от чисел $k-1$ и $n-k-1$. Первое из них показывает число пропущенных членов между первыми двумя членами уравнения, а второе — число таких же членов между последними двумя. В зависимости от характера чисел $k-1$ и $n-k-1$ здесь могут быть несколько случаев.

I. $k-1$ и $n-k-1$ числа четные. Следовательно, n четное, а d , общий наибольший делитель n и k , нечетное.

На основании второго замечания число комплексных корней в этом случае не меньше, чем

$$(k-1) + (n-k-1) = n-2.$$

Чтобы определить точное число их, обращаемся к показателю степени n . Если $n = 4s + 2$, то при $D > 0$ число комплексных корней равно $n-2 = 4s$; если же $D < 0$, то число их равно $n = 4s + 2$. Но когда $D > 0$, то $\Delta < 0$ и, наоборот, если $D < 0$,

то $\Delta > 0$, так как в рассматриваемом случае $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = -1$, $A_n^{n-k-1} > 0$ и d число нечетное.

Пусть $n = 4k$. При таком значении n при $D > 0$ уравнение (4) имеет все корни комплексные, а при $D < 0$ только $n-2 = 4k-2$.

Но так как теперь $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 1$, то неравенствам $D > 0$ и $D < 0$ соответствуют неравенства $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$. Значит, когда имеет место условие I, то уравнение (4) содержит два действительных корня или не имеет действительных корней совсем, смотря по тому, меньше или больше нуля Δ .

II. $k-1$ четное и $n-k-1$ нечетное. Следовательно, n и d нечетные.

Число комплексных корней самое меньшее равно

$$(k-1) + (n-k-1 \pm 1) = n-2 \pm 1,$$

т. е. или $n-1$, или $n-3$. В первом случае уравнение (4) имеет только один действительный корень, во втором — три или один. Чтобы определить точное число их, когда нижняя граница числа комплексных корней равна $n-3$, обращаемся и здесь к степени уравнения n . Если $n = 4s + 1$, то в зависимости от того, больше или меньше нуля дискриминант D , уравнение (4) имеет комплексных корней или $n-1 = 4k$, или $n-3 = 4s-2$. Если же $n = 4s + 3$, то, наоборот, при $D > 0$ уравнение (4) имеет $n-3 = 4s-2$ комплексных корня, а при $D < 0$ всего $n-1 = 4s+2$.

В данном случае, не нарушая общности, всегда можно предположить, что $A_n > 0$. Действительно, если бы $A_n < 0$, то путем преобразования $x = -y$, не изменяющего числа комплексных корней, и последующего изменения знаков во всех членах можно получить трехчленное уравнение, в котором A_0 и A_n будут положительны. Но тогда при $n = 4s + 1$ знаки y и Δ будут одинаковые, а при $n = 4s + 3$ — разные.

Значит, когда имеет место случай II и нижняя граница числа комплексных корней равна $n-3$, то уравнение (4) имеет при $\Delta < 0$ три действительных корня, а при $\Delta > 0$ — только один.

III. $k-1$ нечетное, а $n-k-1$ четное. Следовательно, n и d нечетные.

Число комплексных корней при этом условии по крайней мере равно

$$(k-1 \pm 1) + (n-k-1) = n-2 \pm 1,$$

т. е. или $n-1$, или $n-3$. В первом случае уравнение содержит только один действительный корень, во втором — три или один.

Рассуждая как и в предыдущем случае, приходим к выводу: когда при условии III нижняя граница числа комплексных корней равна $n-3$, то при $\Delta < 0$ уравнение (4) имеет три действительных корня, а при $\Delta > 0$ — только один.

IV. $k-1$ и $n-k-1$ числа нечетные. Следовательно, n и d числа четные.

Число комплексных корней в этом случае самое меньшее равно

$$(k-1 \pm 1) + (n-k-1 \pm 1) = n-2 \pm 1 \pm 1,$$

т. е. n , $(n-2)$ или $(n-4)$. Когда левая часть этого равенства приводится к n , то уравнение (4) действительных корней не имеет. Когда же она приводится к $n-2$, то число действительных корней в уравнении (4) равно 2. Это следует непосредственно из самого вида уравнения. В самом деле, в этом случае на основании второй половины замечания п. „b“ имеем или $A_0 A_k > 0$, а $A_k A_n < 0$ или $A_0 A_k < 0$, а $A_k A_n > 0$. Поэтому последовательность знаков в уравнении (4) будет

$$+ + - \text{ или } + - -.$$

В обоих случаях уравнение (4), содержащее x только в четных степенях, имеет один отрицательный и один положительный корень.

Несколько иначе приходится вести исследование, когда нижняя граница для числа комплексных корней равна $n-4$. В этом случае, чтобы получить суждение о корнях уравнения (4), преобразуем предварительно данное уравнение с помощью подстановки $x^d = y$. В полученном в результате этого преобразования новом уравнении

$$A_0 x^m + A_k x^{m-r} + A_n = 0, \quad (9)$$

m и k одновременно четными быть не могут, вследствие чего не будут одновременно нечетными $k-1$ и $n-k-1$. Таким образом уравнение (9) принадлежит к уже рассмотренным. С другой стороны, так как здесь число комплексных корней, обусловленных двумя пропусками, равно $(k-1)+1$ и $(n-k-1)+1$, то на основании замечания п. „б“ $A_0 A_k < 0$ и $A_k A_n > 0$. Стало быть, последовательность знаков, образуемая коэффициентами уравнений (9) и (4), будет

$$+ - +.$$

Следовательно, нижняя граница для числа комплексных корней, содержащихся в уравнении (9), равна $m-2$, если m четное число, или $m-3$, если m нечетное. Из всего сказанного здесь и ранее следует, что уравнение (9) имеет два положительных корня или ни одного в зависимости от того, отрицательное или положительное принадлежащее ему и уравнению (4) выражение

$$\Delta = m^m A_0^m - r A_n^r - (-1)^m r^r (m-r)^{m-r} A_k^m.$$

Значит, имея в виду, что в подстановке $x^d = y$ показатель d четный, когда при условии IV нижняя граница для числа комплексных корней равна $n-4$, то при $\Delta < 0$ уравнение (4) имеет четыре действительных корня, а при $\Delta > 0$ ни одного.

Произведенное здесь исследование приводит нас к следующей теореме: трехчленное уравнение (4) с действительными коэффициентами и с двумя переменными знаками, лишенное кратных корней, имеет два положительных корня тогда и только тогда, когда $\Delta < 0$. Пользуясь ею и преобразованием $x = -y$, легко определить и число всех действительных корней трехчленного уравнения.

Приведем в качестве иллюстрации этой теоремы два примера.

1. Уравнение

$$3x^5 + 2x^2 - 7 = 0$$

имеет один положительный корень. Полученное с помощью преобразования $x = -y$ новое уравнение

$$3x^5 - 2x^2 + 7 = 0$$

положительных корней не имеет, так как принадлежащее ему

$$\Delta = 5 \cdot 3^3 \cdot 7^3 - 2^2 \cdot 3^3 \cdot 2^5 = 3^3 (5 \cdot 7^3 - 2^7) > 0.$$

Следовательно, предложенное уравнение имеет только один действительный корень.

2. Уравнение

$$x^8 - 2x + 7 = 0$$

отрицательных корней не имеет, но имеет два положительных, так как его

$$\Delta = 8 \cdot 7 - 7^7 \cdot 7^3 < 0.$$

Трехчленные уравнения с кратными корнями

Чтобы уравнение имело кратные корни, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант равнялся нулю. Значит, уравнение (4) имеет кратные корни, если

$$k^k n^m - k A_0^{n-1} A_k^k A_n^{n-k-1} \left[\left(\frac{m}{r} \cdot \frac{A_n}{A_k} \right)^r - (-1)^m \left(\frac{m-r}{r} \cdot \frac{A_k}{A_0} \right)^{m-r} \right] = 0.$$

Но A_0 , A_k и A_n отличны от нуля, поэтому

$$\left(\frac{m}{r} \cdot \frac{A_n}{A_k} \right)^r = (-1)^m \left(\frac{m-r}{r} \cdot \frac{A_k}{A_0} \right)^{m-r}. \quad (10)$$

Таково необходимое и достаточное условие для существования в уравнении (4) кратных корней.

Найдем, пользуясь равенством (10), те трехчленные уравнения в поле рациональных чисел, которые имеют кратные корни. Так как в каждом уравнении с рациональными коэффициентами путем умножения на приличным образом подобранный множитель все коэффициенты можно сделать целыми, то мы здесь ограничимся разысканием лишь трехчленных уравнений с целыми коэффициентами.

С этой целью равенство (10) переписываем в виде

$$\left(-\frac{m}{r} \cdot \frac{A_n}{A_k} \right)^r = \left(-\frac{m-r}{m} \cdot \frac{A_k}{A_0} \right)^{m-r}.$$

Пусть общая величина каждой части этого равенства равна $\frac{p}{q}$, где p и q целые и взаимно простые числа. Из равенств

$$\left(-\frac{m}{r} \cdot \frac{A_n}{A_k} \right)^r = \frac{p}{q}, \quad \left(-\frac{m-r}{m} \cdot \frac{A_k}{A_0} \right)^{m-r} = \frac{p}{q},$$

следует, что

$$p = a^r (m-r) \quad \text{и} \quad q = b^r (m-r),$$

где a и b целые числа и притом, конечно, взаимно простые.

Ввиду этого

$$-\frac{m}{r} \cdot \frac{A_n}{A_k} = \frac{a^{m-r}}{b^{m-r}} \quad \text{и} \quad -\frac{m-r}{m} \cdot \frac{A_k}{A_0} = \frac{a^r}{b^r},$$

или

$$\frac{A_n}{A_k} = -\frac{ra^{m-r}}{mb^{m-r}} \quad \text{и} \quad \frac{A_k}{A_0} = -\frac{ma^r}{(m-r)b^r}.$$

Значит, обозначая через u и v произвольные целые числа, имеем

$$A_0 = (m-r)ubr, \quad A_k = -mva^r, \quad A_k = -mub^{m-r}, \quad A_n = rua^{m-r}.$$

Из выражений для A_k получаем

$$va^r = ub^{m-r},$$

откуда, обозначая через t произвольное целое число, найдем

$$v = tb^{m-r} \quad \text{и} \quad u = ta^r.$$

Следовательно, коэффициенты искомого уравнения будут

$$A_0 = (m-r)tb^m, \quad A_k = -mta^rb^{m-r}, \quad A_n = rta^m,$$

или, пренебрегая общим множителем t :

$$A_0 = (m-r)b^m, \quad A_k = -ma^rb^{m-r}, \quad A_n = ra^m.$$

Таким образом трехчленное уравнение с целыми коэффициентами, содержащее кратные корни, имеет вид

$$f(x) = (m-r)b^m x^{dm} - ma^rb^{m-r} x^{dm-dr} + ra^m = 0. \quad (11)$$

Чтобы найти кратные корни этого уравнения, обращаемся к производной от его левой части

$$f'(x) = md(m-r)b^{m-r} x^{dm-dr-1} (b^r x^{dr} - a^r).$$

Как показывает выражение для производной $f'(x)$ кратные корни уравнения (11) нужно искать среди корней уравнения

$$b^r x^{dr} - a^r = 0. \quad (12)$$

Если через ε обозначим примитивный корень степени dr из единицы, то dr корней уравнения (12) можно будет получить, давая в выражении

$$\varepsilon^i \sqrt[dr]{\frac{a}{b}}$$

показателю i значения $1, 2, \dots, dr$. Подставляя это выражение в функцию $f(x)$, получим после несложных преобразований

$$f(\varepsilon^i \sqrt[dr]{ab^{-1}}) = -ra^m (\varepsilon^{dmi} - 1).$$

Правая часть этого равенства обращается в нуль для тех значений i , при которых dmi делится на dr без остатка. Ввиду того что m и r взаимно простые числа, это возможно тогда и только

тогда, когда i кратно r . Значит, уравнение (11) имеет всего d кратных корней, а именно:

$$\sqrt[d]{ab^{-1}}, \quad \varepsilon^r \sqrt[d]{ab^{-1}}, \quad \varepsilon^{2r} \sqrt[d]{ab^{-1}}, \quad \dots, \quad \varepsilon^{r(d-1)} \sqrt[d]{ab^{-1}}.$$

Все они удовлетворяют уравнению

$$bx^d - a = 0.$$

Производная второго порядка $f''(x)$ в нуль не обращается при значениях x , равных этим корням. Поэтому уравнение (11), а значит, и какое угодно трехчленное уравнение с рациональными коэффициентами, не имеет корней выше второй кратности.

Из всего здесь сказанного следует, что целая рациональная функция $f(x)$ должна делиться на $(bx^d - a)^2$. И действительно, как может убедиться читатель хотя бы путем непосредственного разложения,

$$\begin{aligned} & (m-r) b^m x^{dm} - m a^r b^{m-r} x^{dm-dr} = \\ & = (bx^d - a)^2 \left[(m-r) \sum_{i=1}^r i a^{i-1} (bx^d)^{m-i-1} + \right. \\ & \quad \left. + r \sum_{i=r}^{m-2} a^i (m-1-i) (bx^d)^{m-i-2} \right]. \end{aligned}$$

ВАВИЛОНСКАЯ МАТЕМАТИКА

С. Я. Лурье (Ленинград)

Расшифровкой вавилонских клинописных табличек математического содержания мы обязаны, главным образом, французскому ассириологу Тюрю-Данжен и немецкому историку математики О. Нейгебауэру, в настоящее время покинувшему фашистскую Германию и занявшему кафедру истории математики в Копенгагенском университете. Насколько велико значение расшифрованных вавилонских табличек, как велик тот переворот, который они произвели в наших представлениях об истории математики, можно видеть хотя бы из того факта, что труд Нейгебауэра, посвященный истории догреческой математики, включен в редактируемую Р. Курантом серию „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“, состоявшую до сих пор исключительно из руководств по математике. В недавнее время эта книга появилась в русском переводе, сделанном автором этой статьи, в издании ОНТИ.

Для понимания истории вавилонской математики необходимо в нескольких словах обрисовать историю народов, населявших бассейн рек Тигра и Евфрата. Древнейшим населением южной части этого бассейна были на юге сумерийцы, этнический характер которых до сих пор еще не выяснен, а на севере — семиты, центром которых был город Аккад, недалеко от позднейшего Вавилона. В течение третьего тысячелетия до нашей эры и сумерийская часть области все более семитизировалась, пока, наконец, приблизительно за 2000 лет до нашей эры, семиты


окончательно не покорили шумерийцев; вскоре шумерийцы совершенно исчезают как самостоятельная нация. Это семитическое государство, центр которого был перенесен в Вавилон, достигло высшего культурного расцвета при Хаммураби (около 1900 г. до нашей эры). К эпохе Хаммураби относятся древнейшие и интереснейшие из дошедших до нас математических памятников.

Вавилонская культура в своей основе была заимствована у шумерийцев. Шумерийцы, применявшие в древнейшее время в письменности иероглифы, т. е. схематизированные изображения предметов, затем переходят к более условному способу написания — к клинописи. Писали палочкой, имеющей форму треугольной призмы, по мягкой сырой глине. При вдавливании этой палочки в глину получали два типа отпечатков:

клин  и крючок . Из различных комбинаций клиньев и крючков

и получались различные клинописные знаки, после чего глиняные дощечки сушили или обжигали. Таких дощечек с одними только математическими текстами до нас дошло много сотен. Шумерийский язык имел следующие особенности: 1) корень слова в нем оставался всегда неизменным независимо от падежа, времени и т. д., 2) корни были, как правило, односложными; 3) для образования различных форм к этим корням присоединялись спереди и сзади также неизменяемые приставки. При таких условиях нетрудно было каждый корень и каждую приставку обозначить особым клинописным знаком.

Языки аккадских и вавилонских семитов имели совсем иную структуру: здесь коренная часть слова была обычно двух- или трехсложной; неизменяемыми оставались только согласные, а путем изменения гласных образовывали различные грамматические формы. Ясно, что шумерийскую клинопись нельзя было непосредственно применить для семитского языка. Для ее использования пошли по двум путям.

1. Некоторые шумерийские знаки сохраняют свой смысл семитских текстов, несмотря на то, что теперь они произносятся совсем по-иному; например, знак  (схематическое изображение головы) читался

по-шумерийски *ka*, по-аккадски *rit*, но в обоих случаях означал „лицо“. При таком способе заимствования семит получал возможность понимать шумерийский текст, не зная шумерийского языка, — точно так же, как русский прекрасно поймет, что имел в виду нарисовать англичанин, изобразив коня, хотя англичанин называет этот рисунок не „конь“, а „horse“. Особенно большое значение имел такой способ заимствования в области математических знаков: так как шумерийские грамматические приставки не имели соответствия в аккадском языке, то часто их при этом просто опускали. Семит понимал шумерийский математический текст, не зная, как он произносится, — как мы понимаем математические формулы, содержащиеся в английской книге, даже не зная английского языка.

2. Другим путем использования шумерийских клинописных знаков было использование их в качестве звуковых знаков; в ряде случаев этот путь оказался совершенно неизбежным. Поскольку семитические

слова — многосложные, а сумерийские — односложные, пришлось для обозначения одного слова писать несколько знаков; письмо стало слоговым. Аккадяне применяли сумерийские знаки и как обозначения понятий, и как обозначения звуков, вследствие чего получилась невероятная путаница; но в области математики естественно было пользоваться знаками, руководясь их значением, а не произношением. Таким образом благодаря случайностям истории письма впервые появился ряд специфических знаков-символов не только для чисел (что было и у других народов), но и для математических понятий, как „плюс“, „минус“, „площадь“, даже x („длина“) и y („ширина“). Как мы уже видели, грамматические частицы могли при этом отбрасываться как излишние, и получался такой, например, условный математический текст:

Текст	Смысл
Длина на 3 множително	$3x$
Ширина на 2 множително	$2y$
Сложително	$3x + 2y$
Квадратно	$(3x + 2y)^2$
Площадь длины	x^2
Сложително	$(3x + 2y)^2 + x^2$
Так 2800	$= 2800$

т. е.

$$(3x + 2y)^2 + x^2 = 2800.$$

Кроме языка символов, исторические судьбы вавилонского народа дали вавилонской математике и другое преимущество — древнейшую позиционную систему числового обозначения. У всех остальных народов древности единицы различных разрядов обозначались различными знаками; например, у греков $||||$ обозначало четыре единицы, $LLLL$ — четыре десятка (40), $MMMM$ четыре десятка тысяч (40 000) и т. д. В Вавилоне же (где применялась не десятичная, а шестидесятичная система исчисления) такой способ обозначения применялся только для чисел до 60 (знаком ∇ обозначалась единица, знаком \triangleleft — десяток)

а число шестидесятки обозначалось (как у нас десятки) теми же знаками, что и число единиц, но стоящими на втором месте. Знаки же, стоящие на третьем месте от единиц, обозначали, сколько раз в числе содержится 3600 и т. д. Например,

$\nabla \triangleleft \nabla \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$

означает $1 \times 3600 + 11 \times 60 + 33$, т. е. 4293.

Равным образом вавилоняне впервые в истории изобрели и шестидесятичные дроби, точно соответствующие нашим десятичным дробям; например, то же изображенное выше число, если его понять как дробь, будет означать

$$\frac{1}{60} + \frac{11}{3600} + \frac{33}{216000} = \frac{4293}{216000}.$$

Это тем более замечательно, что ни египтяне, ни греки не знали даже обозначения дробей типа $\frac{m}{n}$ (например $\frac{11}{35}$), а всегда писали дробь в виде суммы дробей с числителем 1 (например, вместо $\frac{11}{35}$ писали $\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{70}$), что крайне громоздко и неудобно. Наоборот, вавилонская система фактически сводила действия над дробями к действиям над целыми числами. Единственным ее неудобством было отсутствие в ней нулей — особых знаков для недостающих разрядов; знак для нулей в середине числа был введен вавилонянами в сравнительно позднее время (IV — III век до н. э.). Нули в начале шестидесятичных дробей и в конце целых чисел никогда не обозначались, так что любое число n , написанное по вавилонскому способу, одновременно означало и $n \cdot 60^{\pm m}$, где m — любое целое число; значность числа определялась по общему контексту и смыслу задачи. Впрочем, этот недостаток имел и свою положительную сторону: благодаря ему вавилоняне уже рано научились, подобно нам, производить действия над числами независимо от „места запятой“ (как выражаемся мы теперь), а также выработали правила для определения значности („места запятой“) в результате.

Нейгебауэру удалось приблизиться и к решению вопроса о происхождении вавилонской шестидесятичной системы и позиционного написания. В весовых системах различных вавилонских городов употреблялись, кроме единиц мер, их половины и трети. При покорении более слабых городов более сильными и при расширении торгового оборота появилась потребность в упрощении расчетов. До этого времени в разных городах существовали различные системы мер, причем отношения между единицами мер разных государств (или различных групп мер в одном и том же государстве) выражались неокругленными числами (смешанными дробями с большим знаменателем). Наиболее простым оказалось отношение 1:6, так как при этом отношении наиболее удобно укладываются в объединенную систему половины и трети высшей меры (они равны 3 и 2 низшим мерам). В соединении с существовавшей в житейском обиходе с древнейших времен десятичной системой получаем новое отношение 1:60.

Далее, единица высшего разряда, как мы видим из наиболее древних табличек, первоначально обозначалась тем же знаком, что и низшая, только большей величины. Ввиду того что единицы высшей меры обычно писались перед единицами низшей, это различие в величине стало излишним и уступило место чисто позиционному написанию.

Шестидесятичная система, представляя ряд вычислительных удобств (особенно при делении), тем не менее оказывается громоздкой и трудно обозримой при устном счете. Это делало необходимым широкое пользование математическими таблицами. И действительно, до нас дошли самые различные таблицы: 1) таблицы умножения; 2) таблицы обратных

величин $\frac{1}{n}$, — эти таблицы служили для деления: если требовалось разделить a на b , то сперва находили по таблице обратных величин $\frac{1}{b}$,

а затем по таблицам умножения $a \times \frac{1}{b}$; например, $36 : 12 = 36 \times \frac{1}{12} = 3$ ¹⁾; 3) таблицы квадратов и целых квадратных корней; 4) таблицы кубов; 5) таблицы функций $x^3 + x^2$, применявшиеся, как мы увидим, для решения кубических уравнений; 6) таблицы последовательных степеней одного и того же числа (применявшиеся, быть может, для вычисления сложных процентов) и т. д. Вавилонянам были известны и способы приближенного нахождения иррациональных квадратных корней, но эти значения не табулировались.

Перейдем теперь к собственно математическим текстам. К сожалению, тексты содержат только готовые рецепты решения задач без каких бы то ни было доказательств или методологических указаний. Тем не менее сами задачи, разрешавшиеся вавилонянами, настолько трудны, что применение систематизированных процедур и доказательств хотя бы упрощенного типа не подлежит никакому сомнению. Наряду с приближенными формулами (например, для вычисления площади кругового сегмента по длине дуги и хорде, когда неизвестен радиус) мы имеем ряд точных формул, — например, для площади треугольника, для трапеции, для нахождения одной из трех величин — стрелки кругового сегмента, хорды и радиуса по двум другим; для нахождения объема усеченного конуса и усеченной правильной четырехугольной пирамиды, причем формула — та же, что применялась позже и греками:

$$v = h \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right]^2.$$

Нет сомнения, что вавилонянам был известен и объем конуса и пирамиды.

Таким образом и в области геометрии древние вавилоняне не уступали древним египтянам. Но, конечно, основное историческое значение вавилонской математики не здесь, а в области алгебры. Мы уже видели, что вавилоняне фактически имели символическое обозначение не только для алгебраических действий (например, „площадь“ для произведения и т. д.), но и для неизвестных („длина“, „ширина“ в смысле x и y). Символический характер этих обозначений виден из того, что в вавилонских задачах площади без всяких оговорок складываются с длиной и шириной. В клинописных текстах содержатся решения всевозможных задач на уравнения первой и второй степени (с одним и двумя неизвестными) и нескольких задач на кубические уравнения (типа $ax^3 + bx^2 = c$).

Как я уже говорил, тексты содержат лишь голые рецепты решения без всяких пояснений и доказательств. Ввиду того что некоторые решения в этих текстах задачи довольно сложны, Нейгебауэр полагал, что вавилоняне, поскольку речь идет об уравнениях первых двух сте-

¹⁾ Здесь 5, т. е. $\frac{5}{60}$; у вавилонян всегда $36 \times 5 = 3$, так как $180 = 3$ шестидесятки, а разряд в письме не обозначался.

²⁾ Египтяне применяли более простую и симметрическую формулу, принятую и теперь:

$$v = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

пней, свободно владели всеми известными нам алгебраическими преобразованиями даже таким искусственным приемом, как нахождение полусуммы и полуразности корней при решении уравнений первой степени. Я показал ¹⁾, что весь ход действий в клинописных текстах становится проще и понятнее, если предположить, что для решения задач, сводящихся к системе двух уравнений первой степени, вавилоняне применяли чисто арифметический прием ложного предположения. Что же касается задач на квадратное уравнение, то полученные раз навсегда формулы применялись уже почти алгебраически, без апелляции к геометрическим представлениям; однако я тем не менее думаю, что сами эти формулы были выведены и получены геометрическим путем. Характерно, например, что вавилоняне не имели представления о том, что квадратное уравнение может иметь два ответа, не говоря уже об отрицательных или мнимых ответах. Недоразумением является также открытие биквадратных уравнений у вавилонян: приводимое Нейгебауэром уравнение

$$m^2(x - y)^2 = x^2$$

путем извлечения корня из обеих сторон сразу же превращается в уравнение первой степени

$$m(x - y) = x$$

(отрицательные корни вавилонянам не были известны). Решение кубического уравнения состояло в приведении вида

$$ax^3 + bx^2 = c$$

к виду

$$\xi^3 + \xi^2 = a,$$

а все значения функции $\xi^3 + \xi^2$ были табулированы и находились из таблиц. Как показал ряд исследователей возражая Нейгебауэру, это приведение, повидимому, обосновывалось геометрическим путем.

Далее, вавилоняне без труда решали задачи на арифметическую прогрессию (чисто арифметическим путем). Значительно интереснее то, что вавилоняне умели находить сумму последовательных квадратов членов натурального ряда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Попытка Нейгебауэра восстановить вавилонский вывод этой формулы алгебраическим путем привела к крайне сложным выкладкам, совершенно искажающим перспективу исторического развития вавилонской математики. Между тем, если осмыслить формулу геометрически, видя в ряде

$$1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2 + \dots + 1 \cdot n^2$$

ступенчатую пирамиду, состоящую из ряда параллелепипедов с высотой, равной 1, и квадратными основаниями со сторонами 1, 2, 3, и т. д., а затем сложить между собой три такие пирамиды, то, как я показал, сразу же без всяких выкладок получается результат, данный

¹⁾ В примечаниях к русскому переводу Нейгебауэра.

в вавилонской задаче. Поэтому есть все основания думать, что вавилоняне пришли к этой формуле именно таким геометрическим путем.

Наконец, есть основание думать, что вавилонянам была известна формула сложных процентов $ap^t = b$ и что они умели находить t при помощи таблицы значений p^t .

Таким образом, если даже отбросить все преувеличения Нейгебауэра, достижения вавилонян все же остаются огромными. Как мы видим в целом ряде областей, греки никогда не достигали таких результатов, как вавилоняне. Есть основание думать, что независимо от греков вавилонская математика повлияла на индийскую, а индийская, в свою очередь, — на арабскую; поэтому работа вавилонян в области алгебры не осталась бесплодной, а повлияла на нынешнюю математику.

РЕЗОЛЮЦИЯ

ПРИНЯТАЯ НА СЕССИИ ГРУППЫ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК СССР 20–21 ДЕКАБРЯ 1936 г. ПО ВОПРОСУ О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ И ПЕДВУЗАХ

Озабоченная общим состоянием математического образования в стране группа математики Академии наук СССР посвятила специальную сессию, имевшую место 20 и 21 декабря 1936 г., изучению этого вопроса.

Заслушав доклады проф. Г. М. Фихтенгольца „О программах по математике и о постановке преподавания математики в средней школе“, члена-корреспондента Академии наук Л. Г. Шнирельмана „О стабильных учебниках математики в средней школе“, проф. Л. А. Люстерника „О подготовке преподавателей математики в педвузах ¹⁾ и учитывая годичный опыт специально созданных при группе комиссий по средней школе, группа вынесла следующие постановления.

А. ПО НАЧАЛЬНОЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛАМ

1. При наличии общего подъема работы начальной и средней школы (за последние годы) постановка преподавания математики остается еще совершенно неудовлетворительной. У учащихся нет ни прочных знаний и навыков, ни математического развития, усвоение остается формальным, нет надлежащего понимания и свободного владения предметом, следствием чего является неумение прилагать свои знания.

2. Причинами такого положения вещей являются:

а) недостаточная квалификация большинства преподавательского состава;

б) неудовлетворительность учебных планов и программ Наркомпроса по математике как в отношении отбора и распределения материала, так и в отношении общих установок;

в) полная непригодность некоторых стабильных учебников и многочисленные недостатки остальных;

г) неудовлетворительное руководство со стороны той группы методических и организационных работников, которой Наркомпросом доверено математическое образование в начальной и средней школах страны.

3. Неудовлетворительное положение с преподавательскими кадрами по математике усугубляется еще тем, что значительная часть квалифици-

¹⁾ Помимо перечисленных докладов были заслушаны доклады акад. С. Н. Бернштейна „О программах по математике во Втузах“ и проф. Л. А. Тумаркина „Об учебниках математики во Втузах“ и вынесены специальные постановления по этим вопросам. (Прим. ред.)

рованных кадров перешла из средней школы в рабфаки, в техникумы и в высшую школу. Хотя объективно сейчас обстоятельства и благоприятствуют возвращению квалифицированных сил из числа вузовских преподавателей в среднюю школу, но оно тормозится формально-бюрократическим отношением к этому важному делу со стороны органов Наркомпроса, а иной раз встречает и прямое противодействие.

Молодые преподаватели из числа окончивших педвузы чаще всего не в состоянии справиться со стоящими перед школой задачами. Неподготовленность молодых педагогов объясняется плохой работой педвузов, о которой специально будет сказано ниже.

В четырех классах начальной школы преподавание всех предметов (в большинстве случаев) сосредоточивается в руках одного преподавателя — „групповода“. Это обстоятельство в значительной мере и обуславливает плохое состояние преподавания арифметики.

4. Учебный план и программа по арифметике (и пропедевтическому курсу геометрии) страдают существенными недостатками. Курс арифметики чрезмерно растянут (он заканчивается лишь в середине 6-го класса), что губительно отражается на всех математических предметах и доставляет серьезное затруднение для смежных предметов (физика и др.). В этом курсе преувеличена роль устного счета (письменные вычисления начинаются лишь в середине 3-го класса), логическое развитие пытаются сообщить детям при помощи элементов теоретической арифметики (под видом изучения „свойств действий“, совершенно недоступных детскому возрасту). В то же время в курсе арифметики вовсе нет настоящих задач, способных развить у учащихся инициативу и сметку, а имеются лишь мало полезные примеры, облеченные в форму задач. Объяснительные записки к программам Наркомпроса задачи почти игнорируют.

5. Положение других математических предметов в средней школе прежде всего уже потому плохо, что они поздно начинаются. Нехватает времени для надлежащего прохождения предмета, курсы комкаются, материал распределяется нерационально, в некоторых классах проходят сразу три математических предмета, не остается времени для повторения. Объемное содержание программ вызывает ряд замечаний, но главная беда не в этом, а в установках программ и объяснительных к ним записок, или вернее, — в отсутствии всяких установок. Например, совершенно не выделена роль задач, — в частности, геометрических задач на построение и доказательство; ничего не сказано о таком трудном для преподавателя вопросе, как иррациональные числа и т. д.

6. Совершенно не согласованы программы по геометрии и черчению. Программа по черчению, например, содержит значительное число сложных геометрических задач, которые, очевидно, не могут быть надлежаще преподаваемы учителями черчения, в то время как в курсе геометрии такие задачи почти отсутствуют.

Большим злом также является несогласованность программы по математике и физике. В то время как математические программы, безусловно, недооценивают возможностей данного возраста, программы по физике их переоценивают.

7. Переходя к учебникам, прежде всего необходимо отметить вопиющее положение вещей со стабильным учебником геометрии. Учебник

Гангнуса и Гурвица совершенно неграмотен и в математическом, и в логическом отношении, и даже в отношении языка. Он не способен научить учащихся логически мыслить и может лишь развратить и дезориентировать их в этом отношении. Этот учебник совершенно неисправим и давно уже осужден математической наукой и педагогической общественностью.

Безграмотный учебник арифметики Попова представляет собой в лучшем случае пустое место и не может принести никакой пользы при преподавании арифметики.

Важно отметить еще непригодность задачников по арифметике Поповой и Березанской. Они по существу являются не задачками, а „примерниками“, но и подбор примеров в них явно недостаточен для создания навыков в счете.

8. Несомненно, ответственность за указанное положение вещей в основном несет Наркомпрос. Постановление партии и правительства о перестройке работы в средней школе в отношении математики выполнено неудовлетворительно. Формально отменив осужденные этим постановлением методы работы, Наркомпрос не дал продуманных новых установок для преподавания арифметики. Точно так же и в отношении стабильных учебников постановление партии и правительства по существу не выполнено. Смысл введения стабильных учебников заключается, между прочим, в поднятии уровня школьных учебников и изгнании халтурных учебников. Вместо этого Наркомпрос в ряде случаев канонизировал в качестве стабильных безграмотные и халтурные учебники даже по тем предметам, по которым уже имелись на русском языке грамотные учебники (например по геометрии). За истекшие со времени постановления партии и правительства 5 лет Наркомпросом ничего не сделано для изменения указанного положения вещей, несмотря на многочисленные сигналы как со стороны практических работников школ, так и со стороны отдельных ученых и научных учреждений.

Приходится признать, что часть вины все же несет и научная общественность, которая слишком поздно и недостаточно энергично реагировала на положение преподавания математики в средней школе.

Мероприятия, необходимые для улучшения постановки преподавания математики в начальной и средней школах

1. Для коренной реорганизации постановки преподавания математики в начальной и средней школах необходимо в срочном порядке провести ряд мероприятий:

- а) по повышению квалификации наличного состава учителей;
- б) по улучшению подготовки новых учителей (о чем специально будет сказано в разделе о педвузах);
- в) по улучшению программ;
- г) по замене негодных учебников и улучшению остальных;
- д) по улучшению руководства со стороны Наркомпроса.

2. Для повышения квалификации наличного состава учителей необходимо значительно расширить сеть курсов, сделав их долгосрочными и организовав в них четкую зачетную систему.

3. Важно также улучшить работу аттестационных комиссий, которые могли бы стимулировать повышение квалификации. Необходимо, чтобы Наркомпрос предписал этим комиссиям обращать больше внимания на фактическую (а не только формальную) квалификацию преподавателей по специальности.

4. Необходимо создать благоприятную обстановку для возвращения в среднюю школу квалифицированных сил, окружив их общественным вниманием и уничтожив формально-бюрократические препоны.

5. Нужно немедленно же начать борьбу за поручение преподавания арифметики, начиная с 3-го класса, специалистам-предметникам. В связи с этим должна быть пересмотрена тарифная сетка и установлена оплата воспитательства в 3-м и 4-м классах.

6. Необходимо переработать существующие программы и объяснительные записки к ним, устранив отмеченные выше недостатки.

7. Учебник геометрии Гангнуса и Гурвица должен быть изъят из школы уже с начала следующего учебного года и временно (на 3—4 года) заменен каким-нибудь из существующих старых учебников после надлежащего редактирования. Точно так же немедленно надлежит принять меры к изданию дополнительно к существующим арифметическим задачкам ряда задачников, содержащих отсутствующий там задачный материал. На учебники геометрии, арифметики, на задачники по арифметике (и на другие учебники) следует объявить долгосрочный конкурс, обеспечив авторитетный состав жюри. Желательно также стимулировать авторское творчество и издавать небольшими тиражами ряд однотипных учебников, из которых после проверки их на практике и могли бы избираться стабильные.

8. Совершенно необходимо издание специальной научной литературы для учителей, в создании которой должна принять деятельное участие научная общественность.

9. Группа математики Академии наук СССР надеется, что Наркомпрос сделает все необходимые оргвыводы из сказанного выше и что лица, виновные в грубых ошибках в области руководства начальной и средней школами, будут заменены людьми, способными справиться с огромными задачами, стоящими перед советской школой.

В частности, необходимо произвести расследование всех обстоятельств, при которых в качестве стабильного учебника по геометрии были утверждены книги Гангнуса и Гурвица, и установить всех лиц, виновных в этом преступлении перед советской школой.

Математическая общественность страны должна оказать Наркомпросу активную помощь в деле поднятия нашей школы на высшую ступень. Особенно следует приветствовать участие математической общественности в работах математического комитета Наркомпроса, которому теперь Наркомом поручено рассмотрение принципиальных вопросов, связанных с преподаванием математики и в начальной и средней школах.

Группа выражает уверенность в том, что соединенными усилиями Наркомпроса, учительской и научной общественности удастся в течение ближайших лет значительно повысить тонус преподавания математики в массовой школе в соответствии с грандиозным ростом социалистической культуры в нашей стране.

Б. ПО ПЕДАГОГИЧЕСКИМ УЧЕБНЫМ ЗАВЕДЕНИЯМ

1. Педагогические учебные заведения, сеть которых развернута в большей своей части лишь после Октябрьской социалистической революции, представляют весьма важное звено в системе народного образования, так как именно эти учебные заведения ведут подготовку основной массы преподавателей для средней школы. От качества работы педвузов в значительной мере зависит и качество работы нашей средней школы.

Однако в настоящее время качество работы по подготовке педагогических кадров следует признать неудовлетворительным. По одной РСФСР эта подготовка ведется в 78 учебных заведениях — в 13 университетах и 65 педвузах. Но университеты в последние годы почти не выпускали преподавателей средней школы. В педвузах же качество подготовки стоит на низком уровне, главным образом, по двум причинам:

а) из-за исключительной слабости кафедр математики большинства педвузов;

б) из-за слабой подготовки поступающих в педвуз студентов.

2. Слабость кафедр математики в педвузах объясняется, во-первых, недостаточно большим количеством высококвалифицированных математиков для удовлетворения потребностей многочисленных педвузов; во-вторых, — слабой активностью самих педвузов (по сравнению с университетами и вузами) в деле привлечения квалифицированных работников, в результате чего даже в Москве и Ленинграде некоторые кафедры математики педвузов не имеют авторитетного руководства (Институт им. Герцена, Московский областной и др). На периферии же педвузы рассчитывают преимущественно на местные педагогические силы, а потому слабость математических кафедр оказывается явлением преобладающим. Тяжелее всего положение кафедр математики педвузов небольших городов, нередко не имеющих не только профессорского и доцентского, но и квалифицированного ассистентского состава.

Особо следует отметить вредное влияние, которое оказывает на качество подготовки кадров то положение изолированности, в котором находятся квалифицированные преподаватели кафедр математики, разбросанные по одному, по два в периферийных педвузах. Такая изолированность быстро и неизбежно приводит к деквалификации этих преподавателей.

3. Слабость физико-математических факультетов педвузов делает их мало популярными среди молодежи; отсюда — трудности комплектования и пониженный уровень подготовленности поступающих. В некоторых областных центрах комплектование физико-математических факультетов педвузов затрудняется конкуренцией одноименных, но более сильных факультетов университетов.

4. Нельзя обойти молчанием также недостатки программ по математическим дисциплинам в педвузах. На существующих программах ясно видно влияние двух тенденций, резко снижающих их качество: во-первых, излишнее стремление приспособить программы к силам наименее квалифицированных педвузов; во-вторых, столь же излишнее стремление превратить математические дисциплины на первых двух курсах исключительно в подсобные для будущих физиков, без учета необходимости своевременного хотя бы минимального математического

воспитания будущих математиков. Обе тенденции приводят к тому, что математической культуры, нужной будущему преподавателю математики в средней школе, педвузы частью вовсе не дают, частью пытаются дать слишком поздно, когда студент уже не успевает должным образом ее усвоить.

Мероприятия, необходимые для улучшения постановки преподавания математики в педвузах.

1. В силу невозможности в настоящее время должным образом укомплектовать все кафедры математики в 65 педвузах, необходимо значительно увеличить относительную роль университетов и крупных педвузов в деле выпуска преподавателей математики для средней школы.

2. Все педвузы Москвы, Ленинграда и других крупных центров поднять на большую высоту в смысле их профессорско-преподавательского состава; в частности, в них необходимо иметь по две или три кафедры математики (например, анализ, геометрия, алгебра), возглавляемых, как правило, учеными, имеющими ученую степень доктора математики.

3. Поставить вопрос о возможности слияния физико-математических факультетов университетов и педвузов (путем сохранения их либо только в университете, либо только в педвузе) в областных городах, имеющих два небольших физико-математических факультета, но не располагающих достаточными квалифицированными кадрами для обслуживания их обоих.

4. Считать необходимым организовать регулярные командировки работников физико-математических факультетов периферийных педвузов в крупные научные центры для получения помощи в научной работе, — в частности, в подготовке к кандидатским экзаменам. Одновременно принять самые энергичные меры к полному обеспечению их на местах научной литературой.

5. При посылке молодых научных работников, окончивших аспирантуру, в периферийные университеты и педвузы, считать единственно целесообразным посылку их группами с прикреплением к ним высококвалифицированных специалистов — их бывших руководителей. При этом необходимо обеспечить этим научным работникам регулярные командировки на 2 месяца ежегодно в научные центры, а на месте — надлежащими материальными условиями для ведения научной работы.

6. Для усиления ассистентского состава периферийных педвузов считать возможным направление в них части из наиболее сильных, окончивших университеты.

7. Считать необходимым увеличить прием аспирантов по математике, сосредоточив их подготовку в крупных университетах и педвузах пропорционально имеющимся или могущим быть привлеченными в эти вузы высококвалифицированным научным кадрам и наличию сильных студентов.

8. В программах по математическим дисциплинам для физико-математических факультетов педвузов решительно подчеркнуть и выдвинуть на первый план те стороны математической культуры, усвоение которых в первую очередь необходимо для будущего преподавателя в средней

школе. Сюда относятся: серьезное теоретико-множественное образование, идеи современной алгебры, системы обоснования геометрии, изучение теории функций действительного и комплексного переменного с точки зрения интересов будущего преподавателя (как примеры можно указать в теории функций действительного переменного общую теорию меры, в теории функции комплексного переменного — всестороннее изучение элементарных функций вплоть до их римановых поверхностей), обязательное изучение истории математики и т. п.

9. Необходимо пересмотреть программы всех математических дисциплин с целью внесения большей систематичности и идейности в преподавание этих дисциплин. В частности, уже сейчас можно указать необходимые мероприятия в этом направлении:

а) ввести в курс анализа на 1-м курсе учение о целых, рациональных и иррациональных числах;

б) разгрузить курс анализа от отрывочных сведений по отдельным вопросам, введенным туда в качестве справочных сведений для физиков, и организовать для их изучения физиками специальные курсы для этих последних на 3-м курсе;

в) внести единство в курс теоретической арифметики, сделав его в основном курсом теории чисел;

г) вынести вопрос о тождествах и уравнениях из курса элементарной математики в курс высшей алгебры;

д) выделить в отдельный курс основания геометрии;

е) приблизить программы по начертательной геометрии и черчению к задачам подготовки преподавателя общеобразовательной средней школы;

ж) поставить вопрос об единой программе по теоретической механике для математиков и физиков;

з) поставить вопрос об обязательном курсе истории математики;

и) при прохождении элементарной математики обратить внимание на умение решать задачи.

РЕЗОЛЮЦИЯ

ПРИНЯТАЯ НА ОБЩЕМ СОБРАНИИ НАУЧНЫХ РАБОТНИКОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В. А. СТЕКЛОВА АКАДЕМИИ НАУК СССР 1 НОЯБРЯ 1936 Г.

Общее собрание сотрудников института им. Стеклова, центрального научного математического учреждения Союза, считает своим долгом обратить внимание Наркомпроса на необходимость навести порядок в деле издания математических учебников.

До сих пор отсутствовал научный контроль со стороны авторитетных ученых и научных учреждений над вышеуказанными учебниками, в результате чего в них встречались неверные утверждения. Лишь полное отсутствие сколько-нибудь добросовестного и серьезного контроля может обусловить то, что стабильный учебник по геометрии является безграмотной халтурной книгой, выпуск которой отнюдь не диктовался необходимостью, поскольку на русском языке имеется целый ряд лучших, во всяком случае, добросовестных и грамотных учебников геометрии.

Мы считаем, что за все, что выходит под маркой „утверждено Наркомпросом“, отвечают органы Наркомпроса, а в отношении математической литературы — персонально лица, руководящие преподаванием математики в средней школе.

Совершенно необходимо, чтобы чувствовалось оперативное руководство в деле выпуска математических учебников. Учебники не должны содержать неясных формулировок, задачки — неверных ответов. Необходимо согласованность задачников с учебниками в смысле порядка распределения материала. Необходимо добиться правильного употребления математических символов в задачниках.

Мы считаем, что $3\frac{1}{2}$ -годовой срок пользования стабильными учебниками вполне достаточен для того, чтобы руководство преподаванием математики в средней школе имело у себя все необходимые материалы, касающиеся учебников, — авторитетные рецензии, исчерпывающие данные об опыте преподавания по учебникам и т. д. Во всяком случае, необходимо, преодолевая страх перед самокритикой, подвести итоги работы по стабильным учебникам.

Коллектив института им. Стеклова охотно придет навстречу Наркомпросу в деле составления рецензий на учебники.

То же самое относится и к математическим учебникам для педвузов.

Пред. собрания
член-корр. Академии наук СССР,
Проф. С. Л. Соболев.

РЕЗОЛЮЦИЯ ОБ УЧЕБНИКАХ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Математический комитет НКП РСФСР в своем заседании от 16/XI 1936 г. обсудил вопрос о качестве стабильных учебников по математике для средней школы. Комитетом были рассмотрены следующие учебники: Гурвиц и Гангнус, Систематический курс геометрии, ч. I и II (докладчик Л. А. Люстерник); Попов, Арифметика для 5-х классов (докладчик Л. Г. Шнирельман); Задачники по арифметике (докладчик В. А. Тартаковский); Киселев, Алгебра (докладчики Л. А. Люстерник и М. К. Гребенча). Рассмотрев представленные материалы, комитет пришел к следующему заключению.

1. Учебник Гурвица и Гангнуса как халтуру и безграмотное изложение основ геометрии признать подлежащим немедленному изъятию из школ. Исправление этой книги в последующих изданиях комитет признает невозможным и предлагает в качестве временной меры издание одного из существующих в русской и иностранной литературе или имеющегося в рукописи учебника геометрии. Рекомендацию и последующее редактирование одной из книг комитет принимает на себя.

2. Учебник Попова как халтуру и бессодержательное соединение отдельных арифметических правил, разъясненных на весьма неубедительных, а иногда неправильных примерах, изъять уже в 1937 г. из школ. Принимая во внимание сравнительно малую роль учебника арифметики для начальной школы, комитет признает возможным пока не издавать никакой замены.

3. Учебник Киселева (алгебра) комитет признает в общем удовлетворительным, но требующим при переиздании тщательной редакции и исправления многочисленных (до 200) ошибок.

4. Задачники по арифметике комитет признает малоудовлетворительными. Основной недостаток задачников состоит в том, что в них нет или почти нет (Беззанская) задач, а имеются лишь записанные словами примеры, требующие для своего решения механического применения изучаемых правил. В качестве временной меры комитет рекомендует усилить издание дополнительных задачиков, имеющих задачи „на соображение“.

5. Кроме того, комитет указывает на несогласованность расположения материала в задачниках по арифметике и геометрии и в стабильных учебниках по этим предметам. Для исправления этого недостатка требуются решительные меры.

Подводя итоги, комитет констатирует совершенно неудовлетворительную работу по изданию стабильных учебников. В особенности позорным является допущение учебников Гурвица и Гангнуса и Попова в качестве стабильных учебников, поэтому комитет просит Наркомпрос расследовать вопрос о лицах, давших первые рецензии на эти книги, и лицах, допустивших их изда-

ние. Комитет просит поставить его в известность о результатах этого исследования, а также представить комитету и самые рецензии. Поддерживая предложение об объявлении конкурса на учебники арифметики и геометрии, комитет просит Наркомпрос войти с ходатайством в соответствующие инстанции о необходимости объявления конкурса на составление задачников по арифметике, а также коренной переработки ряда отделов в учебнике Киселева по алгебре, в задачниках Шапошникова и Вальцева (алгебра) и Рыбкина (геометрия).

Пред. комитета проф. В. В. Степанов

О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

(РЕЗОЛЮЦИЯ, ПРИНЯТАЯ ПРАВЛЕНИЕМ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА 16/XII 1936 г.)

Московское математическое общество полагает, что необходимо срочно предпринять ряд мероприятий, долженствующих повысить уровень преподавания математики в начальной и средней школах: снабжение школ вполне грамотными и добросовестными учебниками, пересмотр существующих программ.

После утверждения стабильных учебников Московское математическое общество на основе широкой дискуссии об учебниках, предпринятой педагогической секцией общества, пришло к выводу, что некоторые стабильные учебники являются совершенно негодными. Учебник геометрии Гурвица и Гангнуса оказался явно безграмотной и халтурной книгой. Московское математическое общество сигнализировало об этом Наркомпросу, направив специальную делегацию. К сожалению, в Наркомпросе противопоставили точке зрения Математического общества точку зрения „своих собственных математиков“, одобривших такие „шедевры“ математической педагогики, как учебник геометрии Гурвица и Гангнуса, учебник арифметики Попова и др. Резко отрицательное отношение к этим учебникам математической общественности Москвы, научной и педагогической, с тех пор неоднократно подтверждалось.

Математическое общество приветствует поручение Математическому комитету Наркомпроса функции контроля над учебниками и программами и выражает лишь сожаление, что до сих пор никакого квалифицированного контроля не было. Ясно, что если бы такой контроль был осуществлен раньше, то учебники, вроде упоминавшихся выше, ни в коем случае не были бы утверждены в качестве стабильных.

Математическое общество обещает свою полную поддержку Математическому комитету Наркомпроса в его борьбе за высококачественные учебники, против халтуры, за высококачественные программы.

Общество хотело бы знать фамилии тех недобросовестных экспертов, по отзывам которых были утверждены упомянутые выше стабильные учебники.

Мы констатируем также неудовлетворительность наших программ средней школы; помимо других недостатков, программы по математике совершенно не связаны с программами по физике, — это лишает учащуюся молодежь возможности научиться применять математические знания к практике. Мы считаем также совершенно недопустимым, чтобы наиболее серьезные вопросы геометрии были перепоручены преподавателям черчения. Особенно остро стоит вопрос с программами по арифметике (гипертрофия устного счета, изгнание из преподавания задач).

Математическое общество считает необходимым улучшить работу Учпедгиза, который в области математики работает неудовлетворительно. Необходимо наряду со стабильными учебниками выпустить хотя бы небольшими тиражами другие учебники и учебные пособия для расширения педагогического кругозора учителя и для оживления творческой педагогической работы в области математики. Необходимо покончить с положением, когда небольшая группа лиц с сомнительной квалификацией полностью монополизировала педагогическую математическую литературу (например, монополиями авторами всей педаго-

гической литературы по геометрии являются те же Гурвиц и Гангнус, которые являются авторами как систематического курса геометрии, так и пропедевтического курса и методики геометрии).

Математическое общество основной причиной отмеченных недостатков работы по математике в средней школе считает отгороженность соответственных органов Наркомпроса от математической общественности, которая не привлекается им к разрешению важных вопросов нашего массового математического образования. Математическое общество готово оказать всемерную помощь Наркомпросу в деле изжития отмеченных недостатков.

Президент о-ва, проф. П. С. Александров,
секретарь правления А. Р. Эйгес

ШКОЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК ПРИ [МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Еще в начале прошлого (1935-1936) учебного года в студенческих организациях Механико-математического факультета возникла мысль создать при университете небольшой актив наиболее способных к математике школьников с тем, чтобы удовлетворить их научные интересы и содействовать их математическому развитию. С этой целью в конце прошлого учебного года (с марта по май 1936 г.) при факультете был организован математический кружок для школьников, в руководстве которым принимали ближайшее участие профессора МГУ Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман. За это время для участников кружка были прочитаны доклады В. А. Ефремовича „Предмет геометрии“, А. Н. Колмогорова „Основные понятия теории вероятностей“ (последний доклад был прочитан участникам кружка совместно с участниками математической олимпиады школьников) и Л. А. Люстерника „Некоторые наглядные примеры из области топологии“. Кроме этих докладов, на занятиях кружка предлагался и решался ряд задач. За короткий срок своего существования кружок в основном выполнил свою задачу: при университете сплотился небольшой, но прочный актив учащихся.

В этом году кружок возобновил свою работу, причем на значительно расширенной основе. Кружком руководит проф. Н. А. Глаголев, председатель оргкомитета 2-й математической олимпиады школьников. Кружок объединяет свыше 150 школьников и в отличие от прошлого года построен на активном участии каждого члена.

Как показал опыт прошлого года, для того чтобы удовлетворить полностью математические интересы школьников, недостаточно только чтения лекций на различные темы и решения задач. Необходимо каждого школьника заставить самого работать над интересующим его вопросом и помогать ему в этой работе. Поэтому в этом году мы разбили кружок на ряд небольших групп, в каждой из которых объединяются школьники, интересующиеся определенным вопросом. Для руководства этими группами комитет ВЛКСМ Механико-математического факультета выделил 15 чел. из числа лучших студентов-отличников старших курсов факультета. Эти студенты руководят в группах темами, близкими к их специальности; поэтому можно считать, что группы обеспечены квалифицированными руководителями. Кроме того, в последнее время ряд профессоров университета выразил желание принять участие в работе этих групп. В настоящее время в группах работают профессор Колмогоров, Шнирельман, Глаголев. На занятиях этих групп школьники делают самостоятельные доклады о проработанных темах. Студенты-руководители помогают им в самостоятельной работе разъяснением трудных вопросов, подбором литературы и советами по докладу. Докладчики имеют возможность пользоваться литературой в читальном зале библиотеки Механико-математического факультета. Лучшие доклады в группах выносятся в виде небольшого сообщения на общее собрание кружка. Помимо докладов, на занятиях групп руководители беседуют со школьниками об интересующих их вопросах и предлагают ряд задач для решения.

Общие собрания кружка происходят один-два раза в месяц. Повестка дня состоит из доклада кого-либо из профессоров университета, сообщения участников кружка о работе в группах, организационных вопросов и решения задач. За истекшее полугодие состоялось четыре общих собрания. Были прочитаны следующие доклады: Проф. Н. А. Глаголев „Геометрия в древности и в наши дни“; Проф. Л. Г. Шнирельман „Теория групп и ее применение к решению уравнений третьей степени“; Проф. А. Н. Колмогоров „Арифметика бесконечного“ (основные понятия теории множеств); Доктор А. Г. Курош „Алгебраические тела и решение уравнений“. В дальнейшем намечаются доклады профессоров П. С. Александрова, И. И. Привалова, Н. А. Глаголева и др.

Кружок пользуется помощью Московского математического общества, предложившего поддержку кружку. Следует отметить и приветствовать, что за последнее время в работе кружка стали принимать участие преподаватели математики средних школ. Преподаватели посещают общие собрания кружка и интересуются работой своих учеников в группах.

В настоящее время в кружке работают группы над следующими темами: 1) уравнения высших степеней (руководители тт. Папуш, Никулин, Соломнецев); 2) качественная геометрия (руководитель т. Фаге); 3) графики уравнений (руководитель т. Бебутов); 4) избранные вопросы из теории чисел (руководители тт. Герчиков, Давыдова, Каримова); 5) трансцендентные числа и квадратура круга (руководители тт. Андреев и Вайнштейн); 6) инверсия, пучки и связи окружностей, задачи на построение (руководители тт. Песин и Вольман); 7) метод подобия, задачи на построение (руководитель т. Шаповаленко).

В результате работы этих групп выделилось определенное ядро активистов (свыше 50 чел.).

Большой помехой в работе кружка является отсутствие у него постоянной территориальной и материальной базы. Такой базой для кружка мог бы быть школьный математический кабинет при МГУ, подобно такому же кабинету, уже организованному в Ленинграде. К сожалению, отсутствие средств и помещения делает пока невозможной организацию такого кабинета.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ В КАЗАНИ

Олимпиада в Казани была организована в мае 1936 г. Ввиду сравнительно небольшого количества десятых классов она была сделана одностепенной.

Было два состязания: по алгебре и геометрии. В первом принял участие около 150 школьников и рабфаковцев, во втором — около 70. На каждом было предложено по восьми задач¹⁾, и победителями считались решившие (при условии правильности решения) наибольшее число.

Из участников восемь получили премии книгами и шесть похвальные отзывы. Но общие результаты олимпиады никак не могут быть сочтены удовлетворительными. Мы не нашли ни одного школьника, который занимался бы математикой вне программы, из интереса. С другой стороны, часто в тетрадях встречались пометки: „задача требует знания материала, который у нас еще не проходил“. В связи с этим решались, главным образом, те задачи, которые требовали лишь применения вполне определенных пройденных правил, в то время как задачи, требующие сообразительности и инициативы, оставались нерешенными.

Это заставляет нас сделать следующие выводы: учащиеся не имеют достаточно досуга для того, чтобы самостоятельно заниматься математикой. Кроме того, заметно некоторое излишнее увлечение математиков формальной стороной дела: стандартизацией записей, точностью формулировок, что тормозит развитие творческой мысли.

Н. Г. Чеботарев

¹⁾ Задачи, предложенные на олимпиаде в Казани, приведены в отделе задач этого выпуска под заголовком „Задачи для школьников“.

П И С Ь М А Ч И Т А Т Е Л Е Й

В вып. 5 „М. П.“ в отделе „Решения задач“ на стр. 127 приведено решение задачи № 30.

Решить неравенство

$$\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} > \frac{(x+b)^2}{x^2+b^2}. \quad (1)$$

Упомянутое решение, во-первых, неполно, так как без всякого основания неявно предполагается, что числа a, b — одного знака (так что $ab > 0$): во-вторых, в деталях это решение излишне громоздко. А именно:

1. Замена (выражаемая словом „или“) неравенства

$$\frac{2ax}{x^2+a^2} > \frac{2bx}{x^2+b^2}, \quad (2)$$

получаемого из (1) почленным отниманием по 1, неравенством

$$\frac{x^2+a^2}{ax} < \frac{x^2+b^2}{bx} \quad (3)$$

допустима только в предположении, что $ab > 0$, так как в этом и только в этом случае произведение обеих частей неравенства (2) положительно и почленное деление (2) на это произведение дает нам неравенство (3) (после умножения на 2).

2. Решая далее неравенство

$$\frac{(b-a)(x^2-ab)}{abx} < 0, \quad (4)$$

к которому сводится (3), автор из допущения $a > b$ выводит такой ряд неравенств:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0, \quad \frac{b-a}{ab} < 0.$$

Этот вывод снова существенно предполагает, что $ab > 0$, а в таком случае имеем просто $b-a < 0$ (так как $a > b$), $ab > 0$; следовательно, $\frac{b-a}{ab} < 0$.

К чему было вводить дроби $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$?

3. Аналогичное усложнение вводит автор при исследовании случая $a < b$.

4. Наконец, все рассуждение автора дает лишь вывод ряда следствий из подлежащего решению неравенства (1), т. е. приводит к необходимым условиям, которым должно удовлетворять всякое решение этого неравенства. Достаточность этих условий следует из обратимости всех примененных в доказательстве преобразований; это необходимо отметить, иначе нельзя утверждать, что найденные для x области значений действительно дают искомые решения.

Вот полное решение более общей задачи, охватывающей данную как частный случай, а именно — задачи, выражаемой „сравнением“ ¹⁾

$$A \equiv \frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} \vee \frac{(x+b)^2}{x^2+b^2} \equiv B? \quad (5)$$

Требуется установить при различных мыслимых предположениях относительно значений букв a и b , смысл знака \vee при различных возможных значениях x , т. е. определить, при каких значениях x будет $A > B$, $A = B$ и $A < B$.

Прежде всего отмечаем, что при $a = b$ (5) обращается при любом x в равенство $A = B$, а при $x = 0$ сравнение (5) обращается в тождество $1 = 1$ (если $a \neq 0$, $b \neq 0$). Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что всегда $x \neq 0$, $a \neq b$.

Отнимая по 1 из обеих частей (5) и деля результаты на 2, получаем равносильное сравнение:

$$\frac{ax}{x^2+a^2} \vee \frac{bx}{x^2+b^2}, \quad (6)$$

Достаточно исследовать случай $a > b$, так как в силу симметричности выражений, стоящих в первой и во второй частях (5) или (6), случай $b > a$ даст *mutatis mutandis* те же результаты, что и случай $a > b$.

Сравнение (6) равносильно следующим сравнениям:

$$\begin{aligned} ax^3 + ab^2x \vee bx^3 + a^2bx, \\ (a-b)x^3 \vee abx(a-b), \\ x^3 \vee abx \quad (\text{так как } a-b > 0). \end{aligned} \quad (7)$$

1. Если $a = 0$, либо если $b = 0$, то (7) обращается в $x^3 \vee 0$, что равносильно (делим почленно на $x^2 > 0$) с

$$x \vee 0.$$

Итак, если $x > 0$, то $A > B$; если $x < 0$, то $A < B$, а выше было установлено, что при $x = 0$ всегда $A = B$.

2. Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, так что $ab \neq 0$, то (7) переходит

$$\text{при } x > 0 \text{ в } x^2 \vee ab,$$

$$\text{„ } x < 0 \text{ „ } x^2 \wedge ab$$

(знак \wedge означает \leq , если знак \vee означает \geq).

Если $ab > 0$, то при $x > 0$ сравнение $x^2 \vee ab$ равносильно сравнению $x \vee +\sqrt{ab}$; при $x < 0$ сравнение $x^2 \wedge ab$ равносильно сравнению $|x| \wedge ab$, или $-x \wedge +\sqrt{ab}$, или $x \vee -\sqrt{ab}$.

Если $ab < 0$, то при $x > 0$ сравнение $x^2 \vee ab$ переходит в $x^2 > ab$; при $x < 0$ сравнение $x^2 \wedge ab$ переходит тоже в $x^2 > ab$ (так как $x^2 > 0$, $ab < 0$).

¹⁾ Объяснение смысла применяемых здесь символов \vee и \wedge и правила их употребления читатель найдет в моей статье „О сравнениях“, помещенной в № 8 этого сборника, или в моей книге „Элементы теории неравенств“ (Москва 1936).

Поэтому при $ab > 0$, при $x > 0$ будет $A \geq B$, когда $x \geq +\sqrt{ab}$,
 при $x=0$ будет $A=B$ (см. выше),
 при $x < 0$ будет $A \leq B$, когда $x \leq -\sqrt{ab}$,

или

$$A > B \begin{cases} \text{при } 0 > x > -\sqrt{ab}, \\ \text{при } x > +\sqrt{ab}. \end{cases}$$

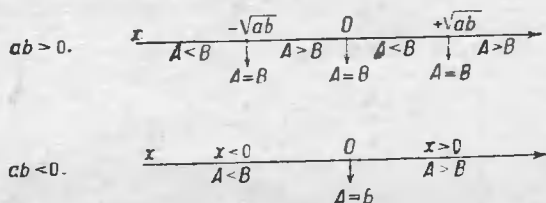
$$A = B \text{ при } x_1 = -\sqrt{ab}, x_2 = 0, x_3 = +\sqrt{ab}$$

$$A < B \begin{cases} \text{при } x < -\sqrt{ab}, \\ \text{при } 0 < x < +\sqrt{ab}. \end{cases}$$

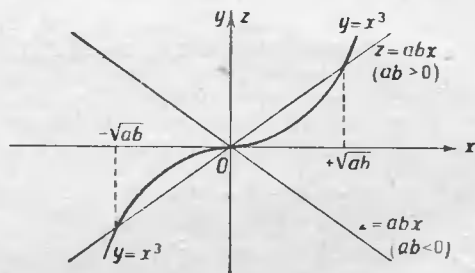
Таким образом при $x > 0$ символ \vee означает $>$, поэтому $A > B$; а при $x < 0$ символ \wedge означает $>$, символ же \vee означает $<$, так что $A < B$. Итак, если $ab < 0$, то

$$\text{при } \begin{cases} x > 0 & \text{всегда } A > B, \\ x = 0 & \text{ " } A = B, \\ x < 0 & \text{ " } A < B. \end{cases}$$

Вот графическое изображение этих результатов:



Сравнение (7) $x^3 \vee abx$ (при $a > b$) легко и наглядно решается графически. А именно, строим графики функций $y = x^3$ и $z = abx$. При $ab > 0$ они пересекаются в точках $x_1 = -\sqrt{ab}$, $x_2 = 0$, $x_3 = +\sqrt{ab}$; при $ab < 0$ — только при $x = 0$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Сразу видно, в каких областях $y \geq z$.

Дм. Крыжановский (Одесса)

С. И. Зетель в своей статье „Свойства треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию“ („М. П.“, вып. 5, 1936 г.) приводит без доказательства следующую теорему Карно: Во всяком треугольнике сумма расстояний от центра описанного круга до сторон треугольника равна сумме радиусов описанного и вписанного кругов.

Теорему Карно нетрудно доказать на основе известной теоремы Птолемея: такое доказательство можно найти, например, в „Задачнике по геометрии“ Попруженко (Учпедгиз, 1936). Мы хотим дать здесь другое, тригонометрическое доказательство теоремы Карно. Хотя оно менее изящно, чем доказательство, основанное на теореме Птолемея, но обладает тем преимуществом, что опирается на более известные формулы и теоремы (теорема Птолемея почему-то исключена из последних изданий „Геометрии“ Киселева и не вошла в стабильный учебник геометрии Гурвица и Гангнуса).

На фиг. 2 видно, что угол EOC ($OE \perp AC$) равен углу B , так как оба эти угла измеряются половиной дуги AC . Обозначая через l_a, l_b, l_c длины перпендикуляров, опущенных из центра O описанного круга на стороны a, b, c треугольника, будем иметь

$$l_b = R \cos EOC = R \cos B, \quad l_a = R \cos A, \quad l_c = R \cos C.$$

Значит,

$$l_a + l_b + l_c = R (\cos A + \cos B + \cos C).$$

Мы должны доказать, что

$$R (\cos A + \cos B + \cos C) = R + r,$$

или что

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = \frac{r}{R}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C - 1 &= (\cos A + \cos B) - (1 - \cos C) = \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Но $\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$; следовательно,

$$\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C - 1 &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Заменяем синусы половинных углов выражениями

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \text{ и т. д.,}$$

имеем

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C - 1 &= 4 \sqrt{\frac{(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}{a^2 b^2 c^2}} = \\ &= \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \\ &= \frac{4S^2}{pabc} = \frac{S}{p} \cdot \frac{4S}{abc} = r \cdot \frac{1}{R} = \frac{r}{R}. \end{aligned}$$

Последнее преобразование сделано на основании формул $pr = S$ и $R = \frac{abc}{4S}$.

Если треугольник тупоугольный, то косинус большего угла, а следовательно, и расстояние до большей стороны надо брать с отрицательным знаком.

И. и Л. Яглом,
ученики 9-го кл. школы № 114 г. Москвы.

З А Д А Ч И

(Решения задач присылать по адресу: Москва, центр, Третьяковский проезд 1, редакция сборников «Математическое просвещение».)

147. Доказать, что для всякого треугольника ABC справедливо соотношение

$$(2S)^2 = h_a \cdot h_b \cdot AN \cdot BH + h_b \cdot h_c \cdot BH \cdot CH + h_c \cdot h_a \cdot CH \cdot AN,$$

где S обозначает площадь треугольника ABC , h_a , h_b , h_c — его высоты, а AN , BH , CH — расстояния от вершин треугольника до его ортоцентра H .

Н. А. Колмогоров (Киров)

148. Построить вписанный в данную окружность треугольник, если известно, что одна из его сторон параллельна данной прямой, и дано положение ортоцентра.

Н. Д. Довгялло (Сталино)

149. Показать, что для всякого треугольника справедливо неравенство

$$S \geq 3\sqrt{3} r^2,$$

где S — площадь треугольника и r — радиус вписанного круга.

Г. А. Делибаш (Баку)

150. На сколько частей разрезается выпуклый n -угольник его диагоналями, если никакие три из них не пересекаются в одной точке внутри n -угольника?

И. Т. Кастровицкий (д. Пязелево)

151. Найти условия, которым должны удовлетворять данные числа a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , чтобы уравнения

$$x_1 + x_2 = a_1 a_2,$$

$$x_1 + x_3 = a_1 a_3,$$

$$x_1 + x_4 = a_1 a_4,$$

$$x_2 + x_3 = a_2 a_3,$$

$$x_2 + x_4 = a_2 a_4,$$

$$x_3 + x_4 = a_3 a_4.$$

были совместны.

Найти значения неизвестных x_1 , x_2 , x_3 , x_4 .

Обобщить задачу.

А. М. Лопшиц (Москва)

152. Доказать, что уравнение

$$x^3 + y^3 + 6xyz = 9z^3$$

не решается в целых числах.

Н. А. Колмогоров (Киров)

153. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0, \\ x_1^2 &+ x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 0, \\ &\vdots \\ x_1^{n-1} &+ x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = 0, \\ x_1^n &+ x_2^n + x_3^n + \dots + x_n^n = n. \end{aligned}$$

154. На гиперболе

М. Я. Перельман (Ленинград)

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

с фокусами $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ взята точка $M_1(x_1, y_1)$ с положительными координатами. Радиус-вектор M_1F_1 пересекает гиперболу в другой точке $M_2(x_2, y_2)$, радиус-вектор M_2F_2 пересекает гиперболу в другой точке $M_3(x_3, y_3)$, и т. д.

Будет ли ряд

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \dots$$

сходящийся?

М. Ф. Зимин (Новочеркасск)

ЗАДАЧИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

(Задачи этого отдела были предложены на математической олимпиаде школьников Казани в мае 1936 г. Подавляющее большинство задач было предложено проф. Е. И. Григорьевым.)

Алгебра

1. Найти коэффициенты квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

если известно, что p и q — его корни.

2. Определить A и B так, чтобы трехчлен

$$Ax^4 + Bx^3 + 1$$

делился на $(x-1)^2$.

3. Доказать, что

$$\lg(a + \sqrt{a^2 - 1}) = -\lg(a - \sqrt{a^2 - 1}).$$

4. Решить систему уравнений

$$x + y + z = 9,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

$$yz + zx + xy = 27.$$

5. При каком условии уравнения

$$x\sqrt{3}-y=a,$$

$$x + y\sqrt{3} = b.$$

$$x^2 + y^2 = c$$

СОВМЕСТИНЫ?

6. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 2.$$

7. Показать, что одно из квадратных уравнений

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0, \quad a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0,$$

необходимо имеет действительные корни, если коэффициенты их — действительные числа, удовлетворяющие условию

$$b_1b_2 \geq 2(a_1c_1 + a_2c_2).$$

8. Доказать, что числовая величина выражения

$$\cos^2(\alpha - x) + \cos^2(\beta - x) - 2\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha - x)\cos(\beta - x)$$

не зависит от x .

Геометрия

9. Найти стороны прямоугольного треугольника по его катету b и проекции c' другого катета на гипотенузу. Построить этот треугольник.

10. Доказать теорему: если в треугольнике ABC угол $A = 2B$, то между его сторонами a, b, c существует зависимость

$$a^2 = b^2 + bc.$$

11. Определить углы треугольника ABC , если известно, что медиана и высота этого треугольника, проведенные из вершины A , делят угол A на три равные части.

12. Найти отношение площади правильного пятиугольника к площади треугольника, образованного стороной пятиугольника и двумя его диагоналями.

13. Построить треугольник ABC , зная положение точек M, N, P , в которых медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной и той же вершины треугольника, пересекают описанную окружность.

14. Найти зависимость между двумя неравными двугранными углами правильной треугольной пирамиды.

15. В треугольнике ABC даны угол A , высота h_b и R — радиус описанного круга. Составить формулу площади этого треугольника и привести ее к виду, удобному для логарифмирования.

16. Показать, что полная поверхность усеченного конуса равна

$$\frac{1}{2} \pi (p^2 + h^2),$$

где p и h суть полупериметр и высота осевого сечения конуса.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

По техническим причинам в выпуске 9 были помещены решения задач без указания фамилий читателей, решивших задачи (сборник был сдан в производство до получения решений от читателей). Здесь мы приводим фамилии читателей, решивших эти задачи.

85. С. И. Городов (Ленинград), А. В. (Москва), И. П. Вогданов (Сталинград) предложили следующий вариант решения.

Пусть $a + b = 8l$ и $a^2 - ab + b^2 = 73l$. Исключая b из этих уравнений, получим

$$3a^2 - 24la + (64l^2 - 73l) = 0.$$

Это, квадратное относительно a , уравнение может иметь целые корни лишь при условии, что выражение $144l^2 - 3(64l^2 - 73l)$ будет квадратом. Тогда

$$144l^2 - 3(64l^2 - 73l) > 0,$$

или, если $l > 0$,

$$73 - 16l > 0,$$

откуда $l < \frac{73}{16}$. Если же $l < 0$, то

$$73 - 16l < 0,$$

откуда $l > \frac{73}{16}$, что невозможно, так как это неравенство противоречит условию $l < 0$. Значит,

$$0 < l \leq 4.$$

Испытывая значения $l = 1, 2, 3, 4$, убеждаемся, что лишь при $l = 3$ $144l^2 - 3(64l^3 - 73l) = 225 = 15^2$ есть квадрат. При $l = 3$, $a = 17$, $b = 7$, или $a = 7$, $b = 17$.

(Решение этой задачи в выпуске 8 ошибочно помечено номером 84.)

86. И. П. Богданов (Сталинград), С. И. Городов (Ленинград).

88. А. В. (Москва), С. И. Городов (Ленинград).

90. И. П. Богданов (Сталинград), С. И. Городов (Ленинград).

92. И. П. Богданов (Сталинград), С. И. Городов (Ленинград).

93. И. П. Богданов (Сталинград), А. В. (Москва), С. И. Городов (Ленинград).

94. С. И. Городов (Ленинград).

95. И. П. Богданов (Сталинград), С. И. Городов (Ленинград).

97. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\sqrt[6]{\frac{6x^4 - 12x^3 - x + 2}{x + 2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^2 + 60}}}{\sqrt{x^3 - \sqrt{x^2 + 60}}} \right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, обозначим буквой U . Имеем

$$\begin{aligned} U &= \sqrt[6]{\frac{(6x^4 - 12x^3 - x + 2)(x^3 - \sqrt{x^2 + 60})^2}{(x + 2)(x^3 - \sqrt{x^2 + 60})^3}} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{(6x^3 - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x^3 - \sqrt{x^2 + 60})}} = \sqrt[6]{\frac{(6x^3 - 1)(x - 2)(x^2 + \sqrt{x^2 + 60})}{(x + 2)(x^6 - x^2 + 60)}} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{(6x^3 - 1)(x - 2)(x^3 + \sqrt{x^2 + 60})}{(x + 2)(x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 15x + 30)}} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{(6x^3 - 1)(x^3 + \sqrt{x^2 + 60})}{(x + 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 15x + 30)}}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 2} U = \sqrt[6]{\frac{47 \cdot 16}{4 \cdot 188}} = 1.$$

С. И. Городов (Ленинград)

99. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-a} &= \frac{b}{y-b} = \frac{c}{z-c}, \\ ax + by + cz &= d^2. \end{aligned}$$

Рассмотреть особо частный случай

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5, \quad d = 5\sqrt{2}.$$

Первое уравнение перепишем так:

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c}.$$

или

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = t;$$

отсюда

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct.$$

Вносим эти значения во второе уравнение; получаем

$$(a^2 + b^2 + c^2) t = d^2,$$

откуда

$$t = \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{ad^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y = \frac{bd^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad z = \frac{cd^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

В указанном выше частном случае получим

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5.$$

И. П. Богданов (Сталинград), С. И. Горохов (Ленинград)

100. Чему должно быть равно m , чтобы уравнения

$$2x^2 - mx + 3 = 0,$$

$$4x^2 - 4(m - 3)x + 3 = 0$$

имели общий корень.

Исключив m из предложенных уравнений, получим

$$4x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет двойной корень $x = 1,5$. Подставив его в одно из предложенных уравнений, получим искомое значение m :

$$m = 5.$$

И. П. Богданов (Сталинград), С. И. Горохов (Ленинград)

101. В два сосуда A и B одинакового веса налита вода, причем вес сосуда A с водой составляет $\frac{4}{5}$ веса сосуда B с водой. Если содержимое сосуда B перелить в сосуд A , то вес последнего вместе с водой превысит вес сосуда B в 8 раз. Найти вес каждого сосуда и количество воды в каждом из них, зная, что в сосуде B содержится на 50 г больше воды, нежели в сосуде A .

Полагая, что каждый сосуд весит x г, вода в сосуде A весит y г, а вода в сосуде B весит z г, получаем из условия задачи следующие три независимые уравнения

$$x + y = \frac{4}{5}(x + z), \quad x + y + z = 8x, \quad y - z = 50.$$

Решив совместно эти уравнения, находим $x = 50$ г, $y = 150$ г, $z = 200$ г.

И. П. Богданов (Сталинград), С. И. Горохов (Ленинград)

102. В треугольнике OAB $OA = a$, $OB = b$, $\angle AOB = \alpha$. Проведем прямую $z'z$ через точку O , перпендикулярную к плоскости треугольника OAB .

1. Показать, что для всякой точки C прямой $z'z$ можно найти другую точку D той же прямой так, что противопо-

ложные ребра тетраэдра $ABCD$ окажутся попарно перпендикулярными.

Определить зависимость между OC и OD .

Найти геометрические места оснований высот этого тетраэдра, а также геометрическое место центра сферы, описанной около этого тетраэдра.

2. Считая угол α острым, найти положение точек S и D , при котором объем тетраэдра достигает минимума. Вычислить этот объем и радиус сферы, описанной около тетраэдра.

1. Пусть C — произвольная точка на прямой $z'z$. Через точку A проводим плоскость AFD , перпендикулярную к прямой BC . Пусть точка D — точка пересечения этой плоскости с прямой $z'z$. У тетраэдра $ABCD$ противоположные ребра попарно перпендикулярны. В самом деле, $AB \perp DC$ по предположению, $AD \perp BC$, потому что AD лежит в плоскости, перпендикулярной к BC . Что касается DB , то это ребро перпендикулярно к AH (AH — прямая пересечения плоскостей AFD и ABO , — следовательно, перпендикуляр к плоскости CBD , им перпендикулярной), так как оно лежит в плоскости, перпендикулярной к AH ; оно перпендикулярно к CH , так как DF и BO — высоты треугольника BCD и, значит, CH — его третья высота; поэтому DB перпендикулярно к плоскости ACH , а значит, и к лежащему в этой плоскости ребру AC .

Углы CDF и CBO равны; поэтому прямоугольные треугольники DOH и OBC подобны и $OD : OH = OB : OC$; $OD \cdot OC = OB \cdot OH = ab \cos \alpha$. Это и есть искомая зависимость между OC и OD .

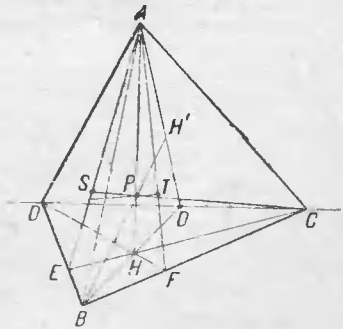
Известно, что в ортогональном тетраэдре высоты проходят через ортоцентры противоположных граней и пересекаются в одной точке P ; точка P — постоянна, так как высоты AH и BH' тетраэдра при любом положении точки C являются высотами постоянного треугольника AOB . Поэтому основания S и T высот CS и DT как вершины прямых углов, опирающихся на постоянный отрезок AP , лежат на сфере с диаметром AP ; с другой стороны, S и T лежат на плоскости, проходящей через $z'z$ и P . Таким образом точки S и T лежат на окружности пересечения указанной сферы с плоскостью DCP . Когда точка C описывает всю прямую $z'z$, каждая из точек S и T описывает всю эту окружность. Итак, эта окружность есть геометрическое место оснований высот CS и DT .

Что касается центра сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, то центр ее лежит, во-первых, в плоскости, перпендикулярной к ребру AB и проходящей через его середину, т. е. в плоскости параллельной прямой $z'z$; во-вторых, центр этой сферы лежит на перпендикуляре, восстановленном к плоскости CBD , основанием которого служит центр M окружности, описанной около треугольника CBD . Но M лежит от стороны DC на расстоянии, равном половине BH ; следовательно, при движении точки C по прямой $z'z$ пробегает прямую (всю), параллельную к прямой $z'z$; перпендикуляр, восстановленный к плоскости CBD в точке M , описывает поэтому плоскость, параллельную прямой. Таким образом центр описанной около тетраэдра сферы лежит на линии пересечения двух плоскостей, параллельных к прямой $z'z$, причем пробегает всю эту прямую, когда C пробегает всю прямую $z'z$.

2. Объем тетраэдра $ABCD$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{DBC} = \frac{1}{6} \cdot AH \cdot BO \cdot DC.$$

AH и BO — постоянны и произведение их равно двойной площади треугольника AOB , то-есть равно $ab \sin \alpha$, а DC равно $OD + OC$, причем произведение



Фиг. 1.

$OD \cdot OC = ab \cos \alpha$ — постоянно. Чтобы сумма была минимальной, нужно поэтому, чтобы было

$$OD = OC = \sqrt{ab \cos \alpha}.$$

Таким образом минимальный объем тетраэдра равен

$$\frac{1}{6} \cdot AH \cdot BO \cdot EOC = \frac{1}{3} ab \sin \alpha \sqrt{ab \cos \alpha}.$$

Д. Шклярский (Москва)

108. Дана окружность с центром в O и точки B и C на окружности. Точка A движется по этой окружности. H — точка пересечения высот треугольника ABC .

1. Определить геометрическое место точки пересечения медиан треугольника AON .

2. Определить геометрическое место основания D внутренней биссектрисы угла A треугольника AON .

3. Определить положение точки A , при котором биссектриса AD имеет заданную длину.

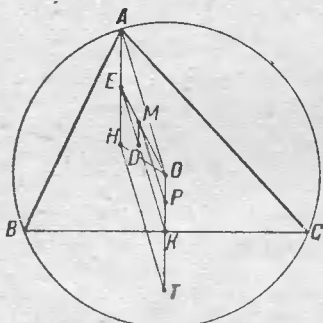
Первое решение задачи.

1. Пусть K — середина BC . Отрезок AH имеет постоянную длину $AH = 2 OK$. Пусть E — середина отрезка AH ; тогда OE — медиана треугольника AON . Обозначим еще через M точку пересечения медиан этого треугольника AON и через P точку на OK такую, что $KP = \frac{1}{3} KO$.

Имеем тогда $EK \parallel AO$, $MP \parallel EK$ и $MP = \frac{2}{3} EK = \frac{2}{3} AO = \frac{2}{3} R$. Значит, точка M лежит на окружности радиуса $\frac{2}{3} R$ с центром в точке P .

Когда A описывает всю данную окружность, точка M пробегает всю окружность P .

2. Продолжим OK за точку K на отрезок $KT = OK$. В параллелограмме $АНТО$ диагональ $ОН$ делится биссектрисой в постоянном отношении, равном $AH : AO = 2 OK : R$. Проведя из точки D



Фиг. 2.

(основания биссектрисы) прямую, параллельную HT , получим в пересечении ее с OT постоянную точку S . Тогда имеем

$$HT : DS = TO : SO = (TS + SO) : SO = \frac{TS}{SO} + 1 = \frac{HD}{DO} + 1 = \frac{HA}{AO} + 1;$$

отсюда $DS = \frac{HT}{\frac{HA}{AO} + 1}$, т. е. DS — постоянно. Значит, геометрическое место

точки D есть окружность с центром в точке S .

3. Найдем сначала геометрическое место точки D' — основания биссектрисы угла T треугольника OTN . Им, очевидно, будет окружность радиуса $\frac{HT}{\frac{AO}{HA} + 1}$ с центром в точке S' , делящей отрезок TO в отношении $\frac{AO}{HA}$. Из

точки T как из центра описываем окружность радиусом, равным заданной длине биссектрисы. Пусть D' и D'' — точки пересечения этих двух окружностей. Приводим прямые OD' и OD'' до пересечения с окружностью — геометрическим местом точки D . Пусть D_1 и D_2 — точки пересечения этих пря-

мых с указанной окружностью. Из точек D_1 и D_2 проводим прямые D_1A_1 и D_2A_2 , параллельно прямым TD' и TD'' соответственно; пересечения этих прямых с заданной окружностью — точки A_1 и A_2 — суть искомые положения точки A .

Задача имеет, вообще говоря, два решения.
Нетрудно доказать правильность построения.

Д. Шклярский (Москва)

Второе решение задачи.

1. Направим ось OX прямоугольной системы координат с началом в центре данной окружности параллельно BC . Пусть расстояние $OK = b$. Тогда

$OK = \frac{AH}{2}$. Если x и y — координаты точки A , то координаты точки H определяются следующим образом:

$$x_H = x, \quad y_H = y - 2b.$$

Координаты точки L — середины OA , очевидно, будут

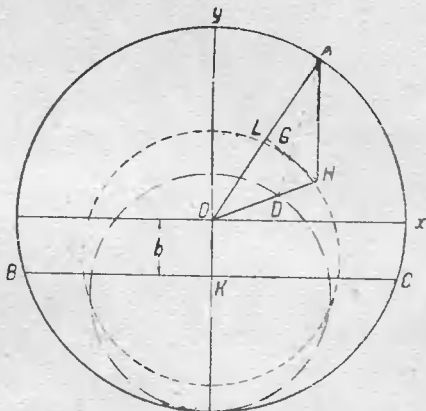
$$x_L = \frac{x}{2}, \quad y_L = \frac{y}{2}.$$

Пусть G — точка пересечения медиан треугольника OAH . Учтя, что

$LG = \frac{GH}{2}$, найдем координаты точки G

$$x_G = \frac{2}{3} x, \quad y_G = \frac{2}{3} (y - b);$$

$$x = \frac{3}{2} x_G, \quad y = \frac{3}{2} y_G + b.$$



Фиг. 3.

Подставив эти значения в уравнение данной окружности, $x^2 + y^2 = R^2$, получим уравнение искомого геометрического места

$$\frac{9}{4} y_G^2 + \frac{9}{4} x_G^2 + 3y_G b + b^2 = R^2,$$

или

$$x_G^2 + \left(y_G + \frac{2}{3} b\right)^2 = \frac{4}{9} R^2.$$

Следовательно, искомое место есть окружность с центром в точке $\left(0, -\frac{2}{3} b\right)$ и радиусом $\frac{2}{3} R$ (на фиг. 3 начерчена простым пунктиром).

2. Приняв во внимание известное свойство биссектрисы угла при вершине и приведенные выше значения координат точки H , легко найдем координаты D основания биссектрисы угла A :

$$x_D = \frac{xR}{R + 2b}, \quad y_D = \frac{(y - 2b)R}{R + 2b},$$

откуда

$$x = \frac{x_D (R + 2b)}{R}, \quad y = \frac{y_D (R + 2b) + 2bR}{R}.$$

Следовательно, уравнение искомого места

$$\left[\frac{x_D (R + 2b)}{R}\right]^2 + \left[\frac{y_D (R + 2b) + 2bR}{R}\right]^2 = R^2,$$

или

$$x^2 + \left(y + \frac{2bR}{R+2b}\right)^2 = \frac{R^4}{(R+2b)^2};$$

это место представляет окружность. Координаты ее центра 0 и $-\frac{2bR}{R+2b}$, а радиус равен $\frac{R^2}{R+2b}$. (На фиг. 3 нанесена сложным пунктиром.)

3. Определить положение точки А, при котором биссектриса AD имеет заданную длину d.

На основании сказанного непосредственно имеем

$$d^2 = \left[x - \frac{xR}{R+2b}\right]^2 + \left[y - \frac{(y-2b)R}{R+2b}\right]^2,$$

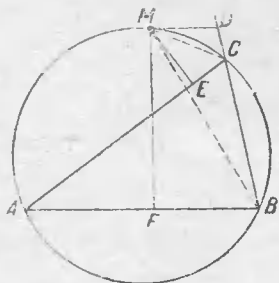
или

$$x^2 + (y+R)^2 = \left[\frac{d(R+2b)}{2b}\right]^2. \quad (1)$$

Следовательно, определение искомых положений приводится к определению точек пересечения окружности (1) с исходной окружностью.

Н. Довгялло (Сталино)

112. На окружности, описанной вокруг треугольника ABC, выберем произвольную точку M. Обозначим через MA, MB и MC расстояния от точки M до вершин A, B и C, а через MD, ME, MF — расстояния от точки M до сторон BC, AC, AB.



Фиг. 4.

Доказать, что $MA \cdot MD = MB \cdot ME = MC \cdot MF$.

Заметим, что $\angle MAC = \angle MBC$, $\angle MBA = \angle MCA$, так как эти углы — вписанные, опирающиеся на равные дуги. Поэтому подобны прямоугольные треугольники:

$$\triangle MAE \sim \triangle MBD, \triangle MBF \sim \triangle MCE.$$

Следовательно,

$$\frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MD}, \quad \frac{MB}{MF} = \frac{MC}{ME}.$$

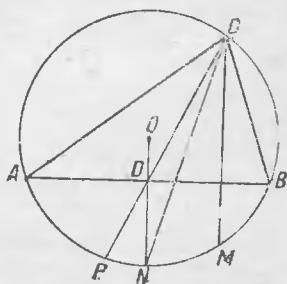
или

$$MA \cdot MD = MB \cdot ME = MC \cdot MF.$$

И. Н. Богданов (Сталинград), С. И. Колесник (Харьков), Б. У. Британ (Днепропетровск)

113. Дана окружность и на ней три точки M, N, P, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

Точку N соединяем с центром окружности O и через точку M проводим прямую, параллельную NO, до пересечения с окружностью в некоторой точке C. Точку C соединяем с P; пусть D — точка пересечения прямых ON и PC. Через D проводим прямую, перпендикулярную к CM; пусть A и B точки пересечения этой прямой с окружностью. Треуголь-



Фиг. 5.

ник ABC — искомый. В самом деле, $CM \perp AB$; следовательно, CM высота; $\sphericalangle AN = \sphericalangle NB$; следовательно, CN — биссектриса угла C ; $AD = DB$; следовательно, CD — медиана.

И. П. Богданов (Сталинград), Б. У. Британ (Днепропетровск), Г. Гандельман (Днепропетровск), Н. Довгялло (Сталино), М. А. Радциг (Ленинград), Ф. Б. Рузин (Днепропетровск), Г. Л. Шестоалов (Ворошиловград).

116. Сколько действительных решений имеет система двух уравнений с тремя неизвестными

$$x + y = 2, \quad xy - z^2 = 1?$$

Возводя первое уравнение в квадрат и вычитая из него почленно второе, предварительно умноженное на 4, получаем

$$(x - y)^2 + 4z^2 = 0.$$

Следовательно,

$$x = y = 0, \quad z = 0.$$

Сопоставляя с первым из предложенных уравнений, получаем единственное решение системы

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

И. П. Богданов (Сталинград), Г. Гандельман (Днепропетровск), С. И. Горюнов (Ленинград), П. М. Макуха (Омск), В. И. Марченко (Голубовка, Донбасс), Л. И. Турбин (Воронеж), М. Л. Радциг (Ленинград).

117. Решить систему уравнений

$$x^3 - y^3 = 26, \quad x^2y - xy^2 = 6.$$

Пусть $x = yt$; после подстановки в уравнения, получаем

$$y^3(t^3 - 1) = 26, \quad y^3(t^2 - t) = 6.$$

Разделив почленно одно уравнение на другое, получим

$$\frac{t^2 + t + 1}{t} = \frac{13}{3}, \quad \text{или} \quad 3t^2 - 10t + 3 = 0.$$

Отсюда для t получаем два значения: $t_1 = 3$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Подставив $t_1 = 3$ в одно из уравнений (1), получим

$$y^3 - 1 = 0, \quad \text{или} \quad (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad y_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Соответствующие значения x найдем по формуле $x = 3y$:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{2}, \quad x_3 = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{2}.$$

Если же $t_2 = \frac{1}{3}$, то одно из уравнений (1) дает

$$y^3 + 27 = 0, \quad \text{или} \quad (y + 3)(y^2 - 3y + 9) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня:

$$y_4 = -3, \quad y_5 = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{2}, \quad y_6 = \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2}.$$

Соответствующие значения x найдутся по формуле $x = \frac{1}{3}y$:

$$x_4 = -1, \quad x_5 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad x_6 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Итак, предложенная система уравнений имеет шесть решений.

И. П. Богданов (Сталинград), С. Болдырев (г. Киров), М. Б. Шенделевич (Макеевка).

Неполные решения прислали В. А. Акишин (Москва), Г. И. Блинев (ст. Бредихино), Б. У. Британ (Днепропетровск), Ф. Генералов (с. Барское), Г. Е. Долинский (Харьков), П. М. Макуха (Омск), В. И. Марченко (Голубовка), М. А. Радциг (Ленинград), Л. И. Турбин (Воронеж), С. И. Колесник (Харьков).

178. Найти сумму $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n+1)^3$.

$$\begin{aligned} & 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n+1)^3 = \\ & = [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n+1)^3] - [2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3] = \\ & = [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n+1)^3] - 2^3 [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3] = \\ & = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} - \frac{8n^2(n+1)^2}{4} = \\ & = (2n+1)^2(n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = \\ & = (n+1)^2[(2n+1)^2 - 2n^2] = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1). \end{aligned}$$

Примечание. Формула принимает более изящный вид, если взять сумму n , а не $n+1$ кубов чисел натурального ряда:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

А. А. Апресян (Баку), Б. У. Британ (Днепропетровск), С. И. Городов (Ленинград), М. Б. Шенделевич (Макеевка), С. И. Колесник (Харьков).

179. Выбраны шесть различных цветов; требуется раскрасить шесть граней куба, — каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами это можно сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.

Перенумеруем грани числами от 1 до 6. Первую грань можно закрасить любой из шести красок, — это дает шесть способов. Вторую грань можно закрасить любой из остальных пяти красок; значит, каждый из шести прежних способов распадается на пять способов, — всего получается тридцать способов. Каждый из этих тридцати способов распадается на четыре новых, так как третью грань можно закрасить любой из оставшихся четырех красок; это дает 120 способов. Четвертую грань можно закрасить в один из оставшихся трех цветов; так получаем 360 способов. Для пятой грани остаются две краски, — получаем 720 способов. Наконец, последнюю грань закрашиваем последней краской, — число способов от этого не меняется.

Но не все полученные способы различны. Путем вращения куба каждую грань можно совместить с первой, притом четырьмя различными способами. При каждом таком совмещении одна раскраска куба совпадает с какой-то другой. Значит, истинное число различных раскрасок в $6 \times 4 = 24$ раза меньше подсчитанного. Итак, куб можно закрасить $\frac{720}{24} = 30$ различными способами.

Для правильного двенадцатигранника с помощью подобных же рассуждений получим

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 5} = 7983360.$$

М. А. Радциг (Ленинград)

Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

СПИСОК КНИГ И СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ ЗА ПЕРВОЕ ПОЛУГОДИЕ 1936 г.

Составил В. И. Морев (Ленинград)

Философия математики

Бакушинский В. Н., Теория от-
носительности; упрощенное математическое
изложение, Учпедгиз, М., стр. 79, ц. 75 к.,
10 000.

Ливенсон Е. М., Независимость аксиом III и II группы системы геометрических аксиом Hilbert'a. «Труды 2-го Всес. мат. съезда», II, стр. 440—441 (резюме).

Молодший В., Истинна ли геометрия Лобачевского, «Мат. и физ.», I, стр. 13—25.
Сборник статей по философии математики, под ред. проф. С. А. Яновской, стр. 136, ц. 1 р. 30 к., 3000.

Содержание: Колмогоров А., Современная математика, стр. 7—13; Александров П., О новых течениях математической мысли, возникших в связи с теорией множеств, стр. 14—20; Курош Г., Современные алгебраические воззрения, стр. 21—29; Молодший В., К вопросу о происхождении и значении аксиом геометрии, стр. 30—54; Яновская С., Идеализм и математика, стр. 55—68; Гливенко В., Кризис основ математики на современном этапе его развития, стр. 69—83; Яновская С., Современные течения в буржуазной философии математики, стр. 84—96; Фишер А., Философия математики Р. Гонсета, стр. 97—107; Яновская С., О так называемых «определениях через абстракцию», стр. 108—136.

Серпинский В. К., О математической индукции, пер. с польского Н. Н. Плещачевского, «Мат. и физ.», III, стр. 17—23. Автор иллюстрирует принцип индукции рядом примеров из теории чисел и теории множеств.

История

Горячкин В. В., Очерк по истории математики в Японии, «Мат. просв.», V, стр. 104—116.

Крылов А. Н., Судьба одной знаменитой теоремы, «Архив истории науки и техники», VIII, стр. 281—299; теорема о площади параболического сектора.

Крылов А. Н., Собрание трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, изд. Акад. наук СССР, стр. 6 н. + 696 + 1 вкл. л. граф., ц. 30 р., 3170.

Содержание: И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, пер. с лат. акад. А. Н. Крылова.

Математика в изданиях Академии наук, 1728—1935. Библиографический указатель, составили О. В. Динзе и К. М. Шафрановский, под ред. проф. В. И. Смирнова,

с пред. акад. А. Н. Крылова, изд. Акад. наук СССР, стр. 316 + XX + 10 вкл. л. портр. ц. 15 р., 1700. Содержит в хронологическом порядке все, изданное Академией наук по математике с ее основания, кончая перечнем трудов 2-го Всес. мат. съезда, с указателями — именным и систематическим.

Самойленко И. Н., «Analyst» Беркли (1685—1753), «Труды 2-го Всес. мат. съезда», II, стр. 442—447; критика исчислений Ньютона и Лейбница.

Струве В. В., Триумф абстрагирующей мысли в отчетности древнего Сумира, «Труды 2-го Всес. мат. съезда», II, стр. 441—442 (резюме); доклад печатается в «Проблемах истории докапиталистических обществ», № 7.

Фридман В. Г., Ньютоновское учение о массе в историческом его развитии, «Природа», III, стр. 120—132.

Фридман В. Г., Eppure si muove (А все-таки движется...) «Природа», V, стр. 133.

Пингер А., О портретах Архимеда, «Мат. и физ.», IV, стр. 29—31. Автор доказывает, что нет достоверных изображений Архимеда.

Чистяков И., Бонавентура Кавальери и его метод неделимых, «Мат. и физ.», III, стр. 3—6.

Юсупов Н. В., Из истории математики народов Ближнего Востока, «Труды 2-го Всес. мат. съезда», II, стр. 456—460.

Алгебра

Аршон С. Е., Некоторые свойства арифметических пропорций, «Мат. просв.», V, стр. 24—28, с 6 рис.

Горнштейн М., Действия над корнями, «Мат. и физ.», II, стр. 18—29.

Граве Д. А., Algorithme du calcul des racines des équations algébriques. L'Acad. de Sc. d'Ukraine. Kiev., стр. 20, с черт., 200.

Кравченко В. Н., Применение рядов к решению уравнений, «Мат. просв.», VI, стр. 22—31.

Крыжановский Д. А., Элементы теории неравенств, ОНТИ, стр. 112, с черт., ц. 2 р., 8000.

Матышук В., Учение о логарифмах в средней школе, «Мат. и физ.», I, стр. 41—56.

Окунев Л. Я., Основная теорема алгебры (всякий многочлен с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень), «Мат. просв.», V, стр. 39—49.

Шорохов И. А., Графический способ решения уравнений четвертой степени, «Мат. просв.», V, стр. 99.

Анализ

Басанец А. М., Гармонический знак-переносный ряд, — «Мат. просв.», VI, стр. 32—41.

Бендт Ф., «Из основ дифференциального и интегрального исчисления» Фраца Бендта, под общ. ред. Д. А. Райкова, Мех.-мат. фак. МГУ, стр. 15, 250.

Бритман М. С., Остаточный член формулы Тейлора в форме Д'Оканя, «Мат. просв.», VI, стр. 41—43.

Бритман М. С., Об остаточном члене формулы Тейлора, «Мат. просв.», VI, стр. 44—45.

Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, ч. I, ОНТИ, стр. 176, с черт., ц. 2 р. 25 к. 5000.

Гнеденко Б. В., Об θ в формуле Лагранжа, «Мат. просв.», VII, стр. 31—35.

Гурса Эд., Курс математического анализа; вновь просм. и перераб. по 5-му франц. изд. проф. В. В. Степановым, изд. 3-е, ОНТИ, т. I: производные и дифференциалы; определенные интегралы; разложение в ряды; геометрические приложения, стр. 591, с черт., ц. 7 р., 7000; т. II: теория аналитических функций, дифференциальные уравнения, стр. 563, с черт., ц. 8 р., 10000.

Кудрявцев В. А. Об интегрируемости уравнения $\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^3$, «Мат. просв.», V, стр. 83—88.

Курс с математического анализа, под редакц. Н. Н. Лузина, учебник для высш. педагог. учебных заведений, Учпедгиз, ч. III. Жегалкин И. И. и Слудская, Интегральное исчисление, стр. 432, с черт., ц. 7 р., 10 000; ч. IV, Бари Н. К., Теория рядов, стр. 140, с черт., ц. 2 р. 60 к., 10 000.

Л. Р. Об одной формуле Эйлера $[e^{i\theta} + \cos\theta + i \sin\theta]$, «Мат. просв.», V, стр. 117—119.

Маркушевич А. И., Ряды, элементарный очерк, ОНТИ, стр. 154 + 2 н., с черт., ц. 2 р. 25 к., 6000.

Орленко П. Е., Графический способ гармонического анализа периодических кривых, «Вестник инженеров и техников», IV, стр. 234—235.

Романовский П. И., Бесконечные сверхстепени, «Мат. просв.», V, стр. 57—71.

Рутковский В. Н., Геометрическая теория гиперболических функций, «Мат. просв.», VII, стр. 26—31.

Степанов В. В., Интегрирование дифференциальных уравнений, Мех.-мат. фак. МГУ, стр. 47, 450, стеклогр.

Тарасов Н. П., Курс высшей математики для техникумов, ОНТИ, стр. 202, с черт., 25 000.

Чарнецкий И. Б., К методике преподавания рядов, «Мат. просв.», VI, стр. 78—91.

Чезаро Эрн., Элементарный учебник аналитического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. I, пер. с нем. с прим. и дополн. О. К. Житомирского, изд. 2-е, ОНТИ, стр. 592, с черт., ц. 9 р., 8000.

Геометрия

Абельсон И. Б., Кривые постоянной ширины (теоремы Барбье), «Мат. просв.», V, стр. 80—83.

Андреев П. П., Глаголева А. А., Глаголев А. А., Основы номаграфии, под ред. проф. А. А. Глаголева, ОНТИ, стр. 128, с черт., ц. 1 р. 85 к., 7000.

Астряб А., Аналитическое доказательство теоремы о двух перпендикулярах по Лемандру, «Мат. и физ.», IV, стр. 64—65.

Беневольский М., Геометрический вывод формулы Герона, «Мат. и физ.», I, стр. 37—38.

Березовский Б. Я., Сборник задач по прямолинейной тригонометрии, ОНТИ, стр. 268, с черт., ц. 3 р. 25 к., 25 000.

Богомолов С. А., Вписанные многогранники с ребрами, равными радиусу, «Мат. просв.», VII, стр. 3—12.

Бончковский Р. Н., Об одной задаче (соотношение сторон прямоугольника наибольшей площади при данном периметре), «Мат. и физ.», I, стр. 38—39.

Бончковский Р. Н., Покрытие плоскости квадратами, правильными 6-угольниками и правильными звездчатыми 12-угольниками, «Мат. просв.», V, стр. 21—23.

Бончковский Р. Н., Теорема Эйлера о многогранниках, «Мат. просв.», VI, стр. 9—11.

Борисов В., Геометрический вывод формулы Герона, «Мат. и физ.», IV, стр. 68.

Ванюшин А. Д., Построения икосаэдра и додекаэдра, «Мат. просв.», V, стр. 3—11.

Галустян С. Б. и Шейдаев М. А., Кривые второго порядка и их применения в технике и естествознании, Азербайджан, Индустриальный институт, Баку, стр. 8 н. + IV + 531, с черт., ц. 8 р., 1000, литогр.

Гинзбург А. М., Общая теория симметрии, «Труды 2-го Всес. мат. съезда», II, стр. 96—99 + 1 л. рис.

Глаголев Н. А., Теоретические основы номаграфии, изд. 2-е, ОНТИ, ц. 4 р. 50 к., 5000.

Глаголев Н. А., Проективная геометрия, ОНТИ, стр. 292, с черт., ц. 4 р., 7000.

Гордон В. О. и Семенов-Огижский М., Курс начертательной геометрии, ОНТИ, стр. 244, с черт., ц. 3 р. 25 к., 3000.

Гуревич Г. Б., Задачи по векторной алгебре, состав. Гуревич Д., Санкин А. и Антонов Н., под ред. проф. Гуревича Г. Б., Моск. институт инженеров транспорта, стр. 18, 250, стеклогр.

Дзык П. Г., Сборник стереометрических задач на комбинации геометрических тел, под ред. В. И. Милинского, Учпедгиз, стр. 52, ц. 70 к., 10 000.

Дрокин А., Измененная формула Герона, «Мат. и физ.», II, стр. 69—71.

Журин П. Д., Номаграммы с параллельными шкалами повышенной точности, «Вестник инженеров и техников», IV, стр. 222—224.

Зетель С. И., Свойства треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, «Мат. просв.», V, стр. 12—21.

Зетель С. И., О делении сторон треугольника пропорционально n -м степеням прилежащих сторон, «Мат. просв.», VI, стр. 6—9.

Зетель С. И., О некоторых свойствах ортогонального и тангенциального треугольников, «Мат. просв.», VII, стр. 12—20.

Иванов Н. А., В треугольнике равным биссектрисам соответствуют равные углы (распространение на геометрию Лобачевского), «Мат. просв.», VI, стр. 75—77.

Извольский Н. А., Вопросы построения линейкой и циркулем, «Мат. и физ.», III, стр. 7—17; IV, стр. 3—14.

Иовлев Н., Очерки геометрии Лобачевского, очерк 2; синтетический метод обоснования геометрии Лобачевского, «Мат. и физ.», II, стр. 3—18.

Каменев В. И., Аксонометрические проекции, изд. 2-е, испр., ОНТИ, стр. 48, с черт., ц. 5 р. 4000. Рекоменд. в качестве учебного пособия для вузов.

Клейн Ф., Неевклидова геометрия, Перев. Н. К. Брушлинского, ОНТИ, стр. 355, с черт., ц. 6 р., 5000, утв. в качестве учебного пособия для университетов.

Котов И. И., Построение де-Лагира (теория конических сечений), «Учен. зап. Ф.-М. фак. Моск. гос. педагог. института», стр. 52—58.

Наумович Н. В., Построения, выполнимые односторонней линейкой, если задана дуга конического сечения, центр и фокус которого известны, «Мат. просв.», V, стр. 71—80.

Перельман Я. И., Занимательная геометрия, изд. 6-е, ОНТИ, стр. 284 + 2 н., с илл., ц. 2 р. 75 к., 75 000.

Переделкин Д. И., Поверхности второго порядка как геометрические места точек, «Мат. просв.», V, стр. 49—55.

Попруженко М., Сборник геометрических задач; планиметрия; задачи на вычисление, под ред. В. И. Милинского, изд. 4-е, Учпедгиз, стр. 61 + 2 н., ц. 75 коп., 10 000.

Правалов В. И., Аналитическая геометрия, изд. 9-е, ОНТИ, стр. 262, с черт., ц. 3 р., 25 000.

Рачко Е., Средние линии трапеции, «Мат. и физ.», IV, стр. 27.

Романовский Б. В., Задачи на построение в стереометрии, Учпедгиз, стр. 112, с черт., ц. 1 р. 15 к., 10 000, пособие для учителей средней школы.

Сигов И., О многогранниках, «Мат. и физ.», IV, стр. 24—27 (возможные правильные многогранники).

Синцов Д. М., Приближенная замена цепной линии параболой или эллипсом, «Мат. просв.», V, стр. 93—95.

Синцов Д. М., Об одной геометрической задаче, «Мат. просв.», V, стр. 96—98 (задача о равенстве отрезков хорды).

Степанов Н. Н., Сферическая тригонометрия, ОНТИ, стр. 112, ц. 1 р. 70 к., 6000.

Франк М. Л., О некоторых простых по форме алгебраических кривых весьма высокого порядка, «Мат. просв.», VI, стр. 45—54.

Хренов Л. С., Вычисление площадей многоугольников по способу Саррона, «Мат. просв.», VI, стр. 12—15.

Черняев М. П., Аналитическое доказательство теоремы Данделена, «Мат. просв.», V, стр. 8—93 (обобщение теорем Паскаля и Бриансона).

Черняев М. П., Геометрическое место центров конических сечений, принадлежащих одному и тому же пучку, «Мат. просв.», VI, стр. 64—65.

Черняев М. П., Строфоиды как инверсионное преобразование равнобочной гиперболы, «Мат. просв.», VI, стр. 66—71.

Черняев М. П., Теорема Сальмона, «Мат. и физ.», IV, стр. 68—69.

Шайкевич М. И., Алгебраические кривые и поверхности с постоянным произведением отрезков секущей, «Мат. просв.», VI, стр. 71—74.

Шапиро Г. М., Основные понятия геометрии афинного пространства, «Учен. зап. Ф.-М. фак. Моск. гос. педагог. института», стр. 29—44.

Шарадзенидзе К. М., Аналитическая геометрия, руководство для высш. учебных заведений, ч. I (Заочн. фин.-эконом. институт), Тифлис, стр. 136, с черт., ц. 2 р. 65 к., 2000.

Школьник А. Г., Цилиндр Шварца (к вопросу о вычислении площадей кривых поверхностей), «Мат. просв.», VII, стр. 37—41.

Шпильрейн Я. Н., Векторное исчисление для инженеров-электриков и физиков, ч. I; векторная алгебра и линейные вектор-функции, ОНТИ, стр. 216, с черт., ц. 2 р. 75 к., 7000.

Теория чисел

Бритман М. С., О простых числах вида $2kn + 1$, «Мат. просв.», VII, стр. 20—21.

Виноградов И. М., Основы теории чисел, ОНТИ, стр. 96, ц. 1 р. 25, 5000.

Грошев А. В., О наилучших приближениях иррациональных чисел, «Мат. просв.», V, стр. 28—38.

Извольский Н. А., О пифагоровских числах «Мат. и физ.», I, стр. 39—40.

Кацман И., Теория целочисленных треугольников, «Мат. и физ.», IV, стр. 15—23.

Кацман И., Уравнение Пелля (или Фермата), «Мат. и физ.», II, стр. 29—32; приводятся способы решения уравнения, основанные на Пифагоровых тождествах.

Кудрявцев В. А., Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли, ОНТИ, стр. 72, ц. 1 руб., 10 000.

Сегал Б. И., Непрерывные дроби, «Мат. просв.», VII, стр. 46—67.

Чудаков Н. Г., Что известно в настоящее время о простых числах? (очерк), «Мат. просв.», VI, стр. 16—22.

Теория вероятностей

Арзуманов Г. С., Сборник задач по общей теории статистики с решениями, вып. I, Баку, стр. 69 + 1 н., ц. 4 руб., 1500.

Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, пер. с нем. Г. М. Бавли, ОНТИ, стр. 80, ц. 1 р. 50 к., 3000.

Прохоров П. М. (ред.), «Задачник по теории вероятностей; составлен коллективом кафедры стрельбы, под ред. П. М. Прохорова, Артилл. акад. РККА, Л., стр. 147 + 2 в., с черт., ц. 8 р. 50 к., 1600.

Романовский В., Смысл и сила статистических критериев, «Соц. реконстр. и науки», III.

Хотимский В., Исторические корни теории вероятностей, «Под знам. марксизма», I, стр. 137—150.

Чеботарев А. С., Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, руководство для геодезических вузов, изд. 3-е, перераб., ОНТИ, стр. 475, с черт., ц. 7 р. 50 к., 4000.

Теплышев П. Л., Теория вероятностей, лекции, читанные в 1879—80 гг. по записи А. М. Липунова, изданы акад. А. Н. Крыловым, изд. Академии наук СССР, стр. 3 + 253 + 1 н., ц. 11 руб., 2000.

Varia

Задачи для подготовки к общегородскому соревнованию, второму туру матем. олимпиады, Лгр. гос. университет и Лгр. горно, стр. 8, 1500.

Каган Я. М., Краткий математический справочник, Кубуч, Л., стр. 296, с черт., ц. 2 р. 75 к., 25 000.

Перельман Я. И., Живая математика, математические рассказы и головоломки, изд. 2-е, ОНТИ, стр. 237, с илл., ц. 1 р. 50 к., 50 000.

Элементарная математика в средней школе, Сборник статей под ред. С. Е. Янина, вып. II, Учпедгиз, стр. 118 + 2 н., с черт., ц. 1 р. 10 к., 10 000.

Содержание: Голубовская А. И., Геометрические задачи на построение, стр. 3—31; Сафронов В. С., Скрещивающиеся прямые, стр. 32—38; Ляпин С. Е., Простейшие методы решения алгебраических уравнений, стр. 39—70; Кованько А. С., О правильных многогранниках, стр. 71—87; Сафронов В. С., Тождественные преобразования, стр. 88—96; Ляпин С. Е., О делимости многочлена на многочлен, стр. 97—107; Кованько А. С., О принципе Кавальери, стр. 108—118.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
С. И. Зетель. Обобщение теоремы Шлеммля	3
Р. Н. Бончковский. О двух пучках чевиан и двух трансверсалих треугольника	6
Д. А. Делибаш. О вычислении длины „прямой n “	10
С. И. Городов. Свойства чисел ряда Фибоначчи	11
П. С. Моденов. Вычисление длины дуги овала постоянной ширины	16
М. П. Черняев. Аналитическое доказательство теоремы Шаля о ги- перболоидальном расположении двух тетраэдров	18
А. Демме. Циклоидальные кривые или трохоиды	19
М. К. Гребенча. Свойства точки наименьшего расстояния от четы- рех точек пространства	30
В. А. Скрылев. К теории трехчленных уравнений	34
С. Я. Лурье. Вавилонская математика	44

ТЕКУЩАЯ ЖИЗНЬ

Резолюция группы математики Академии наук СССР о преподавании математики	51
Резолюция общего собрания научных работников Института им. Стек- лова о школьных учебниках по математике	57
Резолюция Математического комитета Наркомпроса о школьных учеб- никах по математике	58
Резолюция Московского математического общества о преподавании математики в средней школе	59
Школьный математический кружок при Московском государственном университете	60
Математическая олимпиада школьников в Казани	61

ПИСЬМА ЧИТАТЕЛЕЙ

Письма читателей	62
----------------------------	----

ЗАДАЧИ

Задачи	66
Задачи для школьников	67
Решения задач	68

БИБЛИОГРАФИЯ

Список книг и статей по элементарной математике и началам высшей за первое полугодие 1936 г.	77
---	----